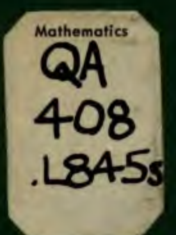
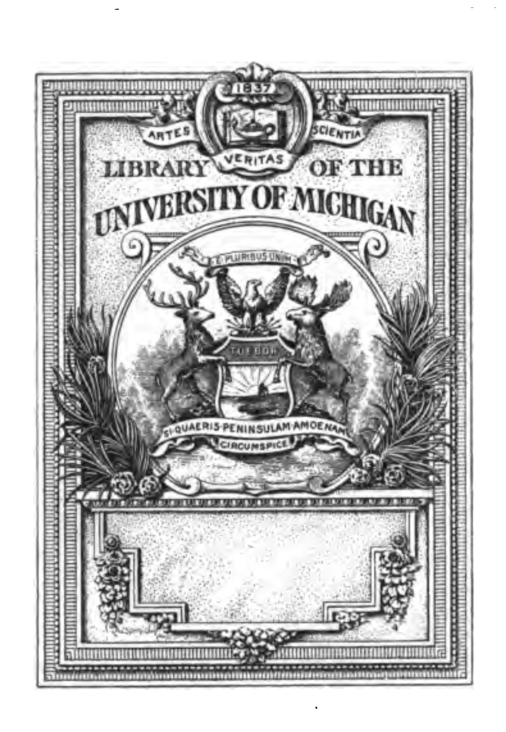
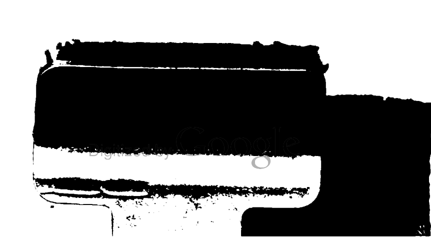

Mathematics
QA
408
.L845s






1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE



STUDIEN

ÜBER DIE

BESSEL'SCHEN FUNCTIONEN.

VON

DR. EUGEN LOMMEL,

PROFESSOR DER MATHEMATIK UND PHYSIK AN DER K. AKADEMIE FÜR LAND- UND FORSTWIRTHE IN HOHENHEIM.



LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1868.

VORWORT.

Mathematisch-physikalische Studien führten den Verfasser vorliegenden Schriftchens mehrfach auf die Bessel'schen Functionen, und veranlassten ihn, sich mit denselben eingehender zu beschäftigen. Diese Transcendenten, theoretisch äusserst interessant, scheinen berufen, auch in den Anwendungen des Calculs eine immer wichtigere Rolle zu spielen; ja es dürfte kaum zu gewagt erscheinen, denselben in dieser Hinsicht gleich nach den goniometrischen Functionen ihren Platz anzuweisen.

Es liegt diesem Werkchen der Gedanke zu Grunde, die Eigenschaften der Bessel'schen Functionen in möglichst einfacher Weise aus drei Grundgleichungen herzuleiten. Dabei wird jede Function eine Bessel'sche genannt, welche je zweien dieser Grundgleichungen, aus denen die dritte unmittelbar folgt, Genüge leistet; da diese zwei Gleichungen äquivalent sind einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung, so kann es nur zwei Arten Bessel'scher Functionen geben. Wir haben demnach eine Bessel'sche Function erster und eine Bessel'sche Function zweiter Art.

Diese Benennung weicht ab von der durch C. Neumann in seiner „Theorie der Bessel'schen Functionen"*) adoptirten, wo eine Function O, die zur Bessel'schen Transcendente I in einer ähnlichen Beziehung steht, wie die Kugelfunction Q zur Kugelfunction P, welche aber nach

*) C. Neumann: Theorie der Bessel'schen Functionen. Ein Analogon zur Theorie der Kugelfunctionen. Leipzig 1867.

unserer Definition keine Bessel'sche Function wäre, als Bessel'sche Function zweiter Art aufgeführt wird. Das erwähnte vortreffliche Werkchen von Neumann stellt überhaupt die Analogie der Bessel'schen mit den Kugelfunctionen in den Vordergrund. Bei dem ganz verschiedenen Wege, den das vorliegende Schriftchen verfolgt, schien es dagegen geboten, jene Analogie bei Seite zu lassen und die Benennungen aus der Natur der Bessel'schen Functionen selbst zu schöpfen. Das mathematische Publicum mag entscheiden, welcher Nomenclatur der Vorzug zu geben sei. —

Bisher wurden nur Bessel'sche Functionen mit (positiv oder negativ) ganzem Index betrachtet; der Verfasser glaubte auch solche mit (positiv oder negativ) gebrochenem Index einführen zu müssen. Diess gelang namentlich durch die Gleichung (V.), welche die Definition der Bessel'schen Functionen mit beliebig negativem Index enthält. Die Naturnothwendigkeit dieser Erweiterung tritt klar hervor im dritten Abschnitt bei der Integration linearer Differentialgleichungen.

Während die Bessel'schen Functionen mit negativ ganzem Index bis auf das Vorzeichen identisch sind mit denen von gleichhohem positiven Index, sind die mit negativ gebrochenem Index wesentlich verschieden von jenen mit gleichhohem positiven Index, und verhalten sich in Bezug auf die bereits erwähnten Differentialgleichungen zu den letzteren, wie Bessel'sche Functionen zweiter Art zu solchen erster Art.

Die Reihenentwickelungen der §§. 13—15 sind auf einem geradezu elementaren Wege aus den Grundgleichungen hergeleitet. Als Analoga zu diesen Reihen sind der Fourier'sche und der Schlömilch'sche Lehrsatz mit naheliegenden Erweiterungen beigefügt worden.

Der zweite Abschnitt behandelt die Bessel'schen Functionen zweiter Art, welche auf sehr einfachem Wege aus denen erster Art hergeleitet werden.

Im dritten Abschnitt endlich werden mehrere lineare Differentialgleichungen, darunter die bekannte Riccati'sche,

durch Bessel'sche Functionen auf eine einfache und völlig erschöpfende Weise integrirt.

Der Anhang enthält als eine vielleicht Manchem erwünschte Beigabe die von Hansen berechneten Tafeln der Bessel'schen Functionen erster Art.

Es war nicht meine Absicht, in dem vorliegenden Werkchen, welches ich hiermit der wohlwollenden Nachsicht der Leser empfehle, eine umfassende Theorie der Bessel'schen Functionen zu liefern; ich war jedoch bestrebt, die wichtigsten bisher über diese Transcendenten bekannt gewordenen Sätze in den hier befolgten Gedankengang einzuflechten und dadurch dem strebsamen Anfänger einen Leitfaden in die Hand zu geben, der es ihm möglich macht, in das Studium der für den Physiker und Astronomen so wichtigen Bessel'schen Functionen mit Leichtigkeit einzudringen.

Hohenheim, im April 1858.

Der Verfasser.

INHALTSVERZEICHNISS.

Erster Abschnitt.

Die Bessel'schen Functionen erster Art.

Seite

Zweiter Abschnitt.

Die Bessel'schen Functionen zweiter Art.

Dritter Abschnitt.

Lineare Differentialgleichungen, welche durch Bessel'sche Functionen integrirt werden.

Anhang.

Erster Abschnitt.

Die Bessel'schen Functionen erster Art.

---

§. 1. Reductionsformeln für $J^{\nu}_{(z)}$.

Die Bessel'sche Function $J^{\nu}_{(z)}$ sei definirt durch die Gleichung

$$\text{(I.)}\qquad J^{\nu}_{(z)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{z^{\nu}}{2^{\nu}\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} \int_0^{\pi} \cos(z\cos\omega)\sin^{2\nu}\omega\,.\,d\omega$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{z^{\nu}}{2^{\nu}\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} \int_0^{\pi} e^{iz\cos\omega}\sin^{2\nu}\omega\,.\,d\omega\,,$$

oder, was dasselbe ist, durch

$$J^{\nu}_{(z)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{z^{\nu}}{2^{\nu}\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} \int_{-1}^{+1} e^{izu}\,(1-u^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\,.\,du\,,$$

wo das Argument z eine beliebige complexe Zahl bedeutet, der Index ν aber reell und grösser als $-\frac{1}{2}$ gedacht ist.

Um eine Reductionsformel zu erhalten, integriren wir theilweise, indem wir $e^{iz\cos\omega}\sin\omega$ als zu integrirenden Factor betrachten, und finden zunächst

$$\int e^{iz\cos\omega}\sin^{2\nu}\omega\,.\,d\omega =$$

$$-\sin^{2\nu-1}\omega\,.\,\frac{e^{iz\cos\omega}}{iz} + \frac{2\nu-1}{iz}\int e^{iz\cos\omega}\sin^{2\nu-2}\omega\,.\cos\omega\cdot d\omega\,,$$

folglich, wenn nur $\nu > \frac{1}{2}$ ist

$$\int_0^{\pi} e^{iz\cos\omega}\sin^{2\nu}\omega\,.\,d\omega = \frac{2\nu-1}{iz}\int_0^{\pi} e^{iz\cos\omega}\sin^{2\nu-2}\omega\,.\cos\omega\,.\,d\omega\,.$$

Durch nochmalige Anwendung desselben Verfahrens ergibt sich weiter

$$\int e^{iz\cos\omega}\sin^{2\nu-2}\omega\,.\cos\omega\,.\,d\omega = -\sin^{2\nu-3}\omega\,.\cos\omega\,.\,\frac{e^{iz\cos\omega}}{iz} + \frac{1}{iz}\int e^{iz\cos\omega}\,d(\sin^{2\nu-3}\omega\,.\cos\omega),$$

also, wenn $\nu > \frac{3}{2}$ ist:

$$\int_0^\pi e^{iz\cos\omega}\sin^{2\nu-2}\omega\,.\cos\omega\,.\,d\omega$$

$$= -\frac{1}{iz}\int_0^\pi e^{iz\cos\omega}\sin^{2\nu-2}\omega\,.\,d\omega + \frac{2\nu-3}{iz}\int_0^\pi e^{iz\cos\omega}\sin^{2\nu-4}\omega\cos^2\omega\,.\,d\omega.$$

Setzt man diesen Werth oben ein, so kommt

$$\int_0^\pi e^{iz\cos\omega}\sin^{2\nu}\omega\,.\,d\omega = \frac{2\nu-1}{z^2}\int_0^\pi e^{iz\cos\omega}\sin^{2\nu-2}\omega\,.\,d\omega$$

$$-\frac{(2\nu-1)(2\nu-3)}{z^2}\int_0^\pi e^{iz\cos\omega}\sin^{2\nu-4}\omega\,.\cos^2\omega\,.\,d\omega$$

$$= \frac{(2\nu-1)(2\nu-2)}{z^2}\int_0^\pi e^{iz\cos\omega}\sin^{2\nu-2}\omega\,.\,d\omega - \frac{(2\nu-1)(2\nu-3)}{z^2}\int_0^\pi e^{iz\cos\omega}\sin^{2\nu-4}\omega\,.\,d\omega.$$

Multiplicirt man hier beiderseits mit $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{z^\nu}{2^\nu\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}$, so erhält man für die Bessel'sche Function $J^\nu_{(z)}$ folgende Reductionsformel:

(II.) $$J^\nu_{(z)} = \frac{2(\nu-1)}{z}J^{\nu-1}_{(z)} - J^{\nu-2}_{(z)}.$$

oder auch, wenn man $\nu+1$ statt ν schreibt:

(II. a) $$\frac{2\nu}{z}J^\nu_{(z)} = J^{\nu-1}_{(z)} + J^{\nu+1}_{(z)}.$$

Von diesen Gleichungen gilt die erstere, so lange $\nu > \frac{3}{2}$, die zweite, so lange $\nu > \frac{1}{2}$ ist. —

Mit Hilfe der Formel (II.) kann J^ν (wir lassen der Kürze wegen das Argument z weg) auf $J^{\nu-1}$ und $J^{\nu-2}$ reducirt werden. Drückt man alsdann mittelst der nämlichen Formel $J^{\nu-1}$ durch $J^{\nu-2}$ und $J^{\nu-3}$ aus, und setzt diesen Werth in (II.) ein, so ererscheint jetzt J^ν auf $J^{\nu-2}$ und $J^{\nu-3}$ zurückgeführt. Durch m malige Wiederholung dieses Verfahrens kann schliesslich J^ν durch $J^{\nu-m}$

und $J^{\nu-m-1}$ ausgedrückt werden. Das Gesetz, nach welchem sich diese Reduction vollzieht, ist meines Wissens bis jetzt nicht bekannt gemacht worden. Dasselbe ist ausgesprochen in folgender Gleichung:

$$(1). \quad J^{\nu} = J^{\nu-m} \sum (-1)^p \cdot \frac{(m-p)^{p|-1}}{p!} \cdot \frac{(2\nu-2m+2p)^{m-2p|2}}{z^{m-2p}}$$
$$- J^{\nu-m-1} \sum (-1)^p \cdot \frac{(m-1-p)^{p|-1}}{p!} \cdot \frac{(2\nu-2m+2+2p)^{m-1-2p|2}}{z^{m-1-2p}},$$

wo die Ausdrücke hinter den Summenzeichen Σ die allgemeinen Glieder zweier endlichen Reihen vorstellen, deren einzelne Glieder daraus hervorgehen, wenn man statt des Buchstaben p nach und nach 0, 1, 2, ... und alle positiven ganzen Zahlen einsetzt; in der ersten Summe braucht man aber p nicht grösser als $\frac{m}{2}$ zu nehmen, weil für grössere Werthe von p der Factor $(m-p)^{p|-1}$ und damit alle folgenden Glieder der Reihe verschwinden; ebenso braucht in der zweiten Reihe p den Werth $\frac{m-1}{2}$ nicht zu übersteigen.

Die allgemeine Geltung der obigen Formel ist erwiesen, sobald gezeigt ist, dass dieselbe, wenn sie für irgend einen Werth von m zutrifft, auch noch für den nächstfolgenden Werth $m+1$ richtig ist. Man erhält aber aus (II.):

$$J^{\nu-m} = \frac{2(\nu-m-1)}{z} J^{\nu-m-1} - J^{\nu-m-2}:$$

Setzt man diesen Werth oben ein, so ergiebt sich zunächst

$$J^{\nu} = J^{\nu-m-1} \sum (-1)^p \cdot \frac{(m-p)^{p|-1}}{p!} \cdot \frac{(2\nu-2m-2)(2\nu-2m+2p)^{m-2p|2}}{z^{m-2p+1}}$$
$$- J^{\nu-m-2} \sum (-1)^p \cdot \frac{(m-p)^{p|-1}}{p!} \cdot \frac{(2\nu-2m+2p)^{m-2p|2}}{z^{m-2p}}$$
$$- J^{\nu-m-1} \sum (-1)^p \cdot \frac{(m-1-p)^{p|-1}}{p!} \cdot \frac{(2\nu-2m+2+2p)^{m-1-2p|2}}{z^{m-1-2p}},$$

wo jetzt noch die zwei Summen, welche mit $J^{\nu-m-1}$ multiplicirt sind, in eine einzige zusammengefasst werden müssen. Sondert man zu dem Ende von der ersteren Summe das erste Glied ab, indem man zuerst 0, dann $p+1$ an die Stelle von p setzt, so geben beide zusammen:

$$\frac{(2\nu-2m-2)^{m+1|2}}{z^{m+1}} - \sum(-1)^p \cdot \frac{(m-1-p)^{p+1|-1}}{(p+1)!} \cdot \frac{(2\nu-2m-2)(2\nu-2m+2+2p)^{m-2-2p|2}}{z^{m-1-2p}}$$

$$-\sum(-1)^p \cdot \frac{(m-1-p)^{p|-1}}{p!} \cdot \frac{(2\nu-2m+2+2p)^{m-1-2p|2}}{z^{m-1-2p}}$$

$$= \frac{(2\nu-2m-2)^{m+1|2}}{z^{m+1}}$$

$$-\sum(-1)^p \cdot \frac{(m-1-p)^{p|-1}}{p!} \cdot \frac{(2\nu-2m+2+2p)^{m-2-2p|2}}{z^{m-1-2p}} \cdot \frac{(m-p)(2\nu-2m+2p)}{p+1}$$

$$= \frac{(2\nu-2m-2)^{m+1|2}}{z^{m+1}} + \sum(-1)^{p+1} \cdot \frac{(m-p)^{p+1|-1}}{(p+1)!} \cdot \frac{(2\nu-2m+2p)^{m-1-2p|2}}{z^{m-1-2p}}$$

$$= \sum(-1)^p \cdot \frac{(m+1-p)^{p|-1}}{p!} \cdot \frac{(2\nu-2m-2+2p)^{m+1-2p|2}}{z^{m+1-2p}}.$$

Wir haben demnach gefunden

$$J^\nu = J^{\nu-m-1}\sum(-1)^p \cdot \frac{(m+1-p)^{p|-1}}{p!} \cdot \frac{(2\nu-2m-2+2p)^{m+1-2p|2}}{z^{m+1-2p}}$$

$$-J^{\nu-m-2}\sum(-1)^p \cdot \frac{(m-p)^{p|-1}}{p!} \cdot \frac{(2\nu-2m+2p)^{m-2p|2}}{z^{m-2p}},$$

eine Formel, welche auch aus Gleichung (1.) hervorginge, wenn man daselbst $m+1$ statt m einsetzen würde. Ist daher jene Gleichung für irgend ein m richtig, so gilt sie allemal auch für $m+1$; ihre allgemeine Geltung ist demnach ausser Zweifel gesetzt, denn für $m=1$ geht sie in (II.) über.

Setzt man in (1.) $\nu = m+1$, so erhält man speciell für positiv ganze Indices:

$$(2).\qquad J^{m+1} = J^1\sum(-1)^p \cdot \frac{(m-p)^{p|-1}}{p!} \cdot \frac{(2p+2)^{m-2p|2}}{z^{m-2p}}$$

$$-J^0\sum(-1)^p \cdot \frac{(m-1-p)^{p|-1}}{p!} \cdot \frac{(2p+4)^{m-1-2p|2}}{z^{m-1-2p}}.$$

§. 2. Entwickelung des Quotienten $\frac{J_{(z)}^{\nu+1}}{J_{(z)}^{\nu}}$ in einen Kettenbruch.

Aus der Gleichung (II.) folgt, wenn man daselbst $\nu+2$ statt ν schreibt und dann durch $J_{(z)}^{\nu+1}$ dividirt:

$$\frac{J_{(z)}^{\nu+2}}{J_{(z)}^{\nu+1}} = \frac{2(\nu+1)}{z} - \frac{J_{(z)}^{\nu}}{J_{(z)}^{\nu+1}}.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$Q^{\nu} = \frac{J^{\nu+1}_{(z)}}{J^{\nu}_{(z)}},$$

so heisst jetzt obige Gleichung

$$Q^{\nu+1} = \frac{2(\nu+1)}{z} - \frac{1}{Q^{\nu}},$$

woraus sofort

(1.) $$Q^{\nu} = \frac{z}{2(\nu+1) - zQ^{\nu+1}}$$

folgt. Durch fortgesetzte Anwendung dieser Relation erhält man den continuirlichen Bruch

$$Q^{\nu} = \cfrac{z}{2(\nu+1) - \cfrac{z^2}{2(\nu+2) - \cfrac{z^2}{2(\nu+3) - \cdots - \cfrac{z^2}{2(\nu+m) - zQ^{\nu+m}}}}}.$$

Da der Quotient Q^{ν} zweier Bessel'schen Functionen, deren Indices um die Einheit differiren, bei wachsendem Index offenbar verschwindet (wie aus dem blossen Anblick der Definition (I.) unmittelbar einleuchtet), so darf in vorstehendem Kettenbruch das Restglied $zQ^{\nu+m}$ weglassen und derselbe ins Unendliche fortgesetzt werden. Man hat alsdann mit Rücksicht auf die Bedeutung von Q^{ν}:

(2.) $$\frac{J^{\nu+1}_{(z)}}{J^{\nu}_{(z)}} = \cfrac{z}{2(\nu+1) - \cfrac{z^2}{2(\nu+2) - \cfrac{z^2}{2(\nu+3) - \cdots}}}$$

Um den Quotienten $\frac{J^{\nu+2}}{J^{\nu}}$ zweier Bessel'schen Functionen, deren Indices um 2 verschieden sind, in einen Kettenbruch zu verwandeln, haben wir aus Gleichung (II.):

$$\frac{J^{\nu+2}_{(z)}}{J^{\nu}_{(z)}} = \frac{2(\nu+1)}{z} \cdot \frac{J^{\nu+1}_{(z)}}{J^{\nu}_{(z)}} - 1,$$

oder mit Benützung des vorstehenden Resultats

(3). $$\frac{J^{\nu+2}_{(z)}}{J^{\nu}_{(z)}} = -1 + \cfrac{2(\nu+1)}{2(\nu+1) - \cfrac{z^2}{2(\nu+2) - \cfrac{z^2}{2(\nu+3) - \cdots}}}$$

Mittelst dieser Formeln (2.) und (3.) könnte man $J^{\nu+1}$ und $J^{\nu+2}$ berechnen, wenn J^{ν} bekannt wäre.

§. 3. Differentialeigenschaften von $J^{\nu}_{(z)}$.

In der Gleichung (II.) ist eine Grundeigenschaft der Function $J^{\nu}_{(z)}$ ausgesprochen. Zwei andere wichtige Gesetze ergeben sich leichter und einfacher, wenn wir statt der Function $J^{\nu}_{(z)}$ die andere $z^{-\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{z})}$ betrachten. Bezeichnen wir der Kürze wegen den Factor $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{2\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}$ einstweilen mit K, so erhalten wir durch Differentiation nach z:

$$\frac{\partial\left(z^{-\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial z} = \frac{iK}{2\sqrt{z}} \int_0^{\pi} e^{i\sqrt{z}\cos\omega} \sin^{2\nu}\omega \,.\, \cos\omega \,.\, d\omega$$

$$= \frac{iK}{2(2\nu+1)\sqrt{z}} \left[e^{i\sqrt{z}\cos\omega} \sin^{2\nu+1}\omega \right]_0^{\pi} - \frac{K}{2(2\nu+1)} \int_0^{\pi} e^{i\sqrt{z}\cos\omega} \sin^{2\nu+2}\omega \,.\, d\omega,$$

oder, weil das vom Integralzeichen befreite Glied für $\nu > -\frac{1}{2}$ verschwindet:

$$\frac{\partial\left(z^{-\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial z} = -\frac{K}{2(2\nu+1)} \int_0^{\pi} e^{i\sqrt{z}\cos\omega} \sin^{2\nu+2}\omega \,.\, d\omega.$$

Bedenkt man nun die Bedeutung von K, so hat man die Gleichung:

$$\text{(III.)} \qquad \frac{\partial\left(z^{-\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial z} = -\tfrac{1}{2}\, z^{-\frac{\nu+1}{2}} J^{\nu+1}_{(\sqrt{z})}$$

und daraus durch $(m-1)$malige Differentiation:

$$\text{(III. a.)} \qquad \frac{\partial^m\left(z^{-\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial z^m} = (-\tfrac{1}{2})^m \cdot z^{-\frac{\nu+m}{2}} J^{\nu+m}_{(\sqrt{z})}.$$

Um daher die Function $z^{-\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{z})}$ $m$mal nach z zu differentiiren, braucht man nur den Index ν um m zu erhöhen, und den Factor $(-\frac{1}{2})^m$ beizufügen. Dieser Satz gilt vorläufig für jedes $\nu > -\frac{1}{2}$.

Wendet man die Gleichungen (II.) und (III.) auf die Differentiation der Function $z^{\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{z})}$ an, so gelangt man zu einem weiteren bemerkenswerthen Satze. Es ist nämlich mit Anwendung von (III.):

$$\frac{\partial \left(z^{\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial z} = \frac{\partial \left(z^{\nu} z^{-\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial z}$$

$$= -\tfrac{1}{2} z^{\frac{\nu-1}{2}} J^{\nu+1}_{(\sqrt{z})} + \nu z^{\frac{\nu-2}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{z})} .$$

Nach (II.) aber ist, so lange $\nu > \frac{1}{2}$:

$$J^{\nu+1}_{(\sqrt{z})} = \frac{2\nu}{\sqrt{z}} J^{\nu}_{(\sqrt{z})} - J^{\nu-1}_{(\sqrt{z})} ,$$

folglich

$$-\tfrac{1}{2} z^{\frac{\nu-1}{2}} J^{\nu+1}_{(\sqrt{z})} + \nu z^{\frac{\nu-2}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{z})}$$

$$= -\nu z^{\frac{\nu-2}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{z})} + \tfrac{1}{2} z^{\frac{\nu-1}{2}} J^{\nu-1}_{(\sqrt{z})} + \nu z^{\frac{\nu-2}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{z})}$$

$$= \tfrac{1}{2} z^{\frac{\nu-1}{2}} J^{\nu-1}_{(\sqrt{z})} .$$

Man hat sonach

$$\text{(IV.)} \qquad \frac{\partial \left(z^{\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial z} = \tfrac{1}{2} \cdot z^{\frac{\nu-1}{2}} J^{\nu-1}_{(\sqrt{z})} .$$

Differentiirt man diese Gleichung noch $(m-1)$mal nach z, so erhält man:

$$\text{(IV. a.)} \qquad \frac{\partial^m \left(z^{\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial z^m} = (\tfrac{1}{2})^m \cdot z^{\frac{\nu-m}{2}} J^{\nu-m}_{(\sqrt{z})} ,$$

d. h. um die Function $z^{\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{z})}$ $m$mal nach z zu differentiiren, braucht man nur den Index ν um m zu vermindern, und noch den Factor $(\frac{1}{2})^m$ beizufügen. Dabei wird jedoch vorausgesetzt, dass ν grösser als $m - \frac{1}{2}$ sei.

Setzt man in der Gleichung (IV. a.) $m+\nu$ statt ν, so nimmt sie folgende Gestalt an:

$$\text{(IV. b.)} \qquad \frac{\partial^m \left(z^{\frac{m+\nu}{2}} J^{m+\nu}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial z^m} = (\tfrac{1}{2})^m \cdot z^{\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{z})}$$

und macht man hierin $\nu = 0$, so hat man noch

$$\text{(IV. c.)} \qquad \frac{\partial^m \left(z^{\frac{m}{2}} J^{m}_{(\sqrt{z})} \right)}{\partial z^m} = (\tfrac{1}{2})^m \cdot J^{0}_{(\sqrt{z})} \, .$$

Setzt man sowohl in (III. a) als in (IV. a) $\nu = 0$, so erhält man

$$\text{(III.}_0\text{)} \qquad \frac{\partial^m J^{0}_{(\sqrt{z})}}{\partial z^m} = (-\tfrac{1}{2})^m \cdot z^{-\frac{m}{2}} J^{m}_{(\sqrt{z})}$$

$$\text{(IV.}_0\text{)} \qquad \frac{\partial^m J^{0}_{(\sqrt{z})}}{\partial z^m} = (\tfrac{1}{2})^m \cdot z^{-\frac{m}{2}} J^{-m}_{(\sqrt{z})} \, .$$

Wollte man die letztere Gleichung gelten lassen, so müsste man die Bessel'sche Function für negativ ganze Indices durch die Gleichung

$$J^{-m}_{(z)} = (-1)^m J^{m}_{(z)}$$

definiren. Die allgemeine Definition für ein beliebig negatives ν, von welcher diese hier nur ein specieller Fall ist, wird im nächsten Paragraphen gegeben werden.

Denkt man sich sowohl in (III.) als in (IV.) $\zeta = z^2$ an die Stelle von z gesetzt, und multiplicirt sodann jede derselben mit

$$\frac{\partial \zeta}{\partial z} = 2z \, ,$$

so erhält man folgende zwei Gleichungen:

$$\text{(1.)} \qquad \frac{\partial \left(z^{-\nu} J^{\nu}_{(z)} \right)}{\partial z} = - z^{-\nu} J^{\nu+1}_{(z)}$$

$$\text{(2.)} \qquad \frac{\partial \left(z^{\nu} J^{\nu}_{(z)} \right)}{\partial z} = z^{\nu} J^{\nu-1}_{(z)} \, .$$

Aus diesen gehen wiederum, wenn man zur Linken die Producte differentiirt, folgende zwei Gleichungen hervor:

$$\text{(3).} \qquad \frac{\partial J^{\nu}_{(z)}}{\partial z} = \frac{\nu}{z} J^{\nu}_{(z)} - J^{\nu+1}_{(z)}$$

$$\text{(4).} \qquad \frac{\partial J^{\nu}_{(z)}}{\partial z} = - \frac{\nu}{z} J^{\nu}_{(z)} + J^{\nu-1}_{(z)} \, .$$

Durch Subtraction dieser beiden Gleichungen würde man auf (II. a.) zurückkommen; ihre Addition aber führt zu der Formel

$$\text{(5.)} \qquad 2 \frac{\partial J^{\nu}_{(z)}}{\partial z} = J^{\nu-1}_{(z)} - J^{\nu+1}_{(z)} \, .$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Gleichung erhält man weiter:

(6). $$\frac{\partial^m J^{\nu}_{(z)}}{\partial z^m} = (\tfrac{1}{2})^m \sum (-1)^p \cdot \frac{m^{p|-1}}{p!} J^{\nu-m+2p}_{(z)} ,$$

eine Formel, deren allgemeine Geltung durch das oben (§. 1) bereits angewendete inductorische Verfahren leicht bewiesen werden kann.

Die Multiplication der Formel (5.) mit der Gleichung (II. a.) ergibt endlich noch

(7.) $$\frac{2\nu}{z} \cdot \frac{\partial (J^{\nu}_{(z)})^2}{\partial z} = (J^{\nu-1}_{(z)})^2 - (J^{\nu+1}_{(z)})^2 .$$

§. 4. Definition von $J^{\nu}_{(z)}$ für negative ν.

Wendet man auf die Gleichung (III. b.), nämlich auf

$$(\tfrac{1}{2})^m z^{\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{z})} = \frac{\partial^m \left(z^{\frac{m+\nu}{2}} J^{m+\nu}_{(\sqrt{z})} \right)}{\partial z^m}$$

$$= \frac{\partial^m \left(z^{m+\nu} z^{-\frac{m+\nu}{2}} J^{m+\nu}_{(\sqrt{z})} \right)}{\partial z^m}$$

zur Rechten den Satz

$$\frac{\partial^m (PQ)}{\partial z^m} = \sum_{p=0}^{p=m} \frac{m^{p|-1}}{p!} \cdot \frac{\partial^p P}{\partial z^p} \cdot \frac{\partial^{m-p} Q}{\partial z^{m-p}}$$

an, indem man bedenkt, dass

$$\frac{\partial^p z^{m+\nu}}{\partial z^p} = (m+\nu)^{p|-1} \cdot z^{m+\nu-p}$$

und nach (III. a.)

$$\frac{\partial^{m-p} \left(z^{-\frac{m+\nu}{2}} J^{m+\nu}_{(\sqrt{z})} \right)}{\partial z^{m-p}} = (-\tfrac{1}{2})^{m-p} z^{-\frac{2m+\nu-p}{2}} J^{2m+\nu-p}_{(\sqrt{z})}$$

ist, so erhält man zunächst

$$(\tfrac{1}{2})^m z^{\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{z})} = \sum (-\tfrac{1}{2})^{m-p} \cdot \frac{m^{p|-1} (m+\nu)^{p|-1}}{p!} \cdot z^{\frac{\nu-p}{2}} J^{2m+\nu-p}_{(\sqrt{z})} ,$$

also, wenn man jetzt z^2 statt z schreibt, und beiderseits mit $2^m z^{-\nu}$ multiplicirt:

(V.) $$J^{\nu}_{(z)} = (-1)^m \sum_{p=0}^{p=m} (-2)^p \cdot \frac{m^{p|-1} (m+\nu)^{p|-1}}{p!} z^{-p} \cdot J^{2m+\nu-p}_{(z)} .$$

Die endliche Reihe zur Rechten befolgt, so lange $\nu > -\frac{1}{2}$ ist, die nämlichen Gesetze, wie die Eingangs definirte Function $J^{\nu}_{(z)}$, indem sie alsdann mit ihr vollkommen identisch ist. Sie befolgt sie aber auch dann noch, wenn ν negativ und kleiner als $-\frac{1}{2}$ ist, so lange nur $2m + \nu - p$ grösser als $-\frac{1}{2}$ bleibt, was aber wegen des willkürlich zu wählenden m immer bewirkt werden kann.

Die Gleichung (V.) kann uns daher als Definition der Function $J^{\nu}_{(z)}$ gelten, für den Fall, dass ν negativ und unter $-\frac{1}{2}$ ist. Durch sie kann $J^{\nu}_{(z)}$ bei negativem ν auf unendlich viele Arten durch eine endliche Reihe dargestellt werden, welche nur Bessel'sche Functionen mit positivem Index enthält, wenn nur das positiv ganze m der Bedingung $m + \nu > 0$ gemäss gewählt wird. Wo also die in der ursprünglichen Definition (I.) der Bessel'schen Function zugeschriebene Form zu gelten aufhört, tritt die neue in Gleichung (V.) ausgedrückte Form dafür ein. Für diese neue Form der Function gelten die Grundgesetze (II., III. und IV.) ebenso gut, wie für die anfängliche, was sehr leicht nachzuweisen ist.

Wir können daher jetzt aussprechen:

Die Gleichungen (II., III., IV.) und alle daraus abgeleiteten gelten für jedes beliebig reelle (positive oder negative) ν.

Darum gilt auch die Gleichung (V.) selbst, auch wenn zur Rechten Bessel'sche Functionen mit negativen Indices auftreten, falls man denselben nur die Bedeutung beilegt, welche sie gemäss ihrer durch die nämliche Gleichung (V.) gegebenen Definition haben müssen.

Als speciellen Fall erhalten wir aus (V.) für $\nu = -m$

(V.a.) $$J^{-m}_{(z)} = (-1)^m J^{m}_{(z)}$$

eine Gleichung, auf welche wir bereits durch die Betrachtungen des vorigen Paragraphen geführt wurden.

Um eine Anwendung der letzteren Gleichung zu zeigen, werde in (IV.a.) $2m$ statt m und m statt ν eingesetzt. Es ergibt sich zunächst

$$\frac{\partial^{2m}\left(z^{\frac{m}{2}} J^{m}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial z^{2m}} = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{2m} z^{-\frac{m}{2}} J^{-m}_{(\sqrt{z})} \quad ;$$

sodann mit Rücksicht auf (V.a.)

$$\frac{\partial^{2m}\left(z^{\frac{m}{2}} J^{m}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial z^{2m}} = (-1)^m \cdot \frac{z^{-\frac{m}{2}}}{2^{2m}} J^{m}_{(\sqrt{z})} \quad .$$

Dasselbe Resultat erhält man anch, ohne negative Indices zu gebrauchen, wenn man (IV.c.) $m$mal nach z differentiirt und dann (III.$_0$.) anwendet. Man findet nämlich zunächst

$$\frac{\partial^{2m}\left(z^{\frac{m}{2}} J^{m}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial z^{2m}} = (\tfrac{1}{2})^m \cdot \frac{\partial^m J^{0}_{(\sqrt{z})}}{\partial z^m} \quad .$$

Nach (III.$_0$.) aber ist

$$\frac{\partial^m J^{0}_{(\sqrt{z})}}{\partial z^m} = (-\tfrac{1}{2})^m \cdot z^{-\frac{m}{2}} J^{m}_{(\sqrt{z})}$$

und man hat sonach dieselbe Gleichung wie oben gefunden.

§. 5. Entwicklung von $(z+h)^{\pm\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{z+h})}$.

Durch Anwendung des Taylor'schen Lehrsatzes auf die Function $z^{-\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{z})}$ erhalten wir:

$$(z+h)^{-\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{z+h})} = \sum_{p=0}^{p=n} \frac{h^p}{p!} \cdot \frac{\partial^p\left(z^{-\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial z^p}$$

$$+ \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \frac{\partial^{n+1}\left((z+\Theta h)^{-\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{z+\Theta h})}\right)}{\partial z^{n+1}} \; ,$$

wo Θ ein echter positiver Bruch ist und dem p alle positiven ganzen Werthe von 0 bis n beizulegen sind. Nun ist aber nach (III.a.)

$$\frac{\partial^p\left(z^{-\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial z^p} = (-\tfrac{1}{2})^p \cdot z^{-\frac{\nu+p}{2}} J^{\nu+p}_{(\sqrt{z})} \quad .$$

Man hat also

$$\text{(VI.)} \qquad (z+h)^{-\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{z+h})} = \sum_{p=0}^{p=n} (-1)^p \cdot \frac{h^p}{2^{p|2}} \cdot z^{-\frac{\nu+p}{2}} J^{\nu+p}_{(\sqrt{z})}$$

$$+ (-1)^{n+1} \cdot \frac{h^{n+1}}{2^{n+1|2}} (z+\Theta h)^{-\frac{\nu+n+1}{2}} J^{\nu+n+1}_{(\sqrt{z+\Theta h})} \; .$$

Durch dasselbe Verfahren, angewendet auf die Function $z^{\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{z})}$, ergibt sich

$$(\text{VII.}) \quad (z+h)^{\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{z+h})} = \sum_{p=0}^{p=n} \frac{h^p}{2^{p|2}} z^{\frac{\nu-p}{2}} J^{\nu-p}_{(\sqrt{z})}$$

$$+ \frac{h^{n+1}}{2^{n+1|2}} (z+\Theta h)^{\frac{\nu-n-1}{2}} J^{\nu-n-1}_{(\sqrt{z+\Theta h})}.$$

Beide Formeln (VI.) und (VII.) gelten für jedes beliebige reelle ν.

Die Gleichung (VI.) kann übrigens auch ohne Anwendung des Taylor'schen Lehrsatzes, freilich nur für positiv ganze Werthe des Index, in folgender Weise abgeleitet werden.

Das Doppelintegral

$$\int\int e^{i(u\sqrt{y}+v\sqrt{z})} \,.\, du\, dv$$

werde über die Oberfläche eines Kreises vom Radius 1 ausgedehnt, so dass die Veränderlichen u und v an die Bedingung $u^2+v^2 \overline{\gtrless} 1$ gebunden sind. Führt man nun statt u und v die neuen Variabeln u' und v' mittelst der Gleichungen

$$u\sqrt{y+z} = u'\sqrt{y} - v'\sqrt{z}$$
$$v\sqrt{y+z} = u'\sqrt{z} + v'\sqrt{y}$$

ein, so hat man erstlich

$$u\sqrt{y} + v\sqrt{z} = u'\sqrt{y+z},$$

ferner

$$\frac{\partial u}{\partial u'} = \sqrt{\frac{y}{y+z}} \qquad \frac{\partial v}{\partial u'} = \sqrt{\frac{z}{y+z}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial v'} = -\sqrt{\frac{z}{y+z}} \qquad \frac{\partial v}{\partial v'} = \sqrt{\frac{y}{y+z}},$$

demnach

$$\frac{\partial u}{\partial u'} \cdot \frac{\partial v}{\partial v'} - \frac{\partial u}{\partial v'} \cdot \frac{\partial v}{\partial u'} = 1 .$$

Das umgeformte Doppelintegral lautet demnach

$$\int\int e^{iu'\sqrt{y+z}} \,.\, du'\, dv'$$

mit der Bedingung $u'^2+v'^2 \overline{\gtrless} 1$, weil ja $u'^2+v'^2=u^2+v^2$ ist.

Integrirt man nun hier zunächst nach v', so erhält man, weil $\sqrt{1-u'^2}$ und $-\sqrt{1-u'^2}$ als obere und untere Grenze für v', dagegen $+1$ und -1 als solche für u' einzusetzen sind:

$$\iint\limits_{u'^2+v'^2 \leqq 1} e^{iu'\sqrt{y+z}}\, du'\, dv' = 2\int_{-1}^{+1} e^{iu'\sqrt{y+z}}\sqrt{1-u'^2}\cdot du$$
$$= 2\pi \cdot \frac{J^1(\sqrt{y+z})}{\sqrt{y+z}}\,.$$

Integrirt man dagegen das oben vorgelegte Doppelintegral zuerst nach v, so ergibt sich

$$\iint e^{i(u\sqrt{y}+v\sqrt{z})}\, du\, dv = \frac{1}{i\sqrt{z}}\int_{-1}^{+1} e^{iu\sqrt{y}}\left(e^{i\sqrt{1-u^2}\cdot\sqrt{z}} - e^{-i\sqrt{1-u^2}\sqrt{z}}\right) du\,.$$

Nun ist

$$e^{i\sqrt{1-u^2}\sqrt{z}} - e^{-i\sqrt{1-u^2}\sqrt{z}} = 2i\sin\left(\sqrt{1-u^2}\,\sqrt{z}\right)$$
$$= 2i\sum(-1)^p\cdot\frac{(1-u^2)^{\frac{2p+1}{2}}\, z^{\frac{2p+1}{2}}}{(2p+1)!}\,.$$

Folglich hat man

$$\pi\,\frac{J^1(\sqrt{y+z})}{\sqrt{y+z}} = \sum(-1)^p\cdot\frac{z^p}{(2p+1)!}\int_{-1}^{+1} e^{iu\sqrt{y}}(1-u^2)^{\frac{2p+1}{2}}\, du\,,$$

oder, weil

$$\int_{-1}^{+1} e^{iu\sqrt{y}}(1-u^2)^{\frac{2p+1}{2}}\, du = \pi\cdot 1^{p+1|2}\cdot\frac{J^{p+1}(\sqrt{y})}{y^{\frac{p+1}{2}}}$$

ist, die folgende Formel, welche nichts anderes als die Gleichung (VI.) ist für $\nu = 1$:

$$\frac{J^1(\sqrt{y+z})}{\sqrt{y+z}} = \sum(-1)^p\cdot\frac{z^p}{2^{p|2}}\cdot y^{-\frac{p+1}{2}}\, J^{p+1}(\sqrt{y})\,.$$

Differentiirt man diese Gleichung nach Anleitung der Formel (III. a.) $(n-1)$mal nach y, so liefert sie sofort die Entwickelung von $(y+z)^{-\frac{n}{2}} J^n(\sqrt{y+z})$ für jedes positiv ganze n. Auch die entsprechende Formel für J^0 kann daraus abgeleitet werden, wenn man mit $y+z$ beiderseits multiplicirt, dann zur Linken nach (IV.), zur Rechten nach (III.) differentiirt, und schliesslich noch die Reductionsformel (II.) anwendet.

Integrirt man das obige transformirte Doppelintegral nach u (die Accente können jetzt als überflüssig weggelassen werden), so erhält man

$$\iint e^{iu\sqrt{y+z}}\,du\,dv = \frac{1}{i\sqrt{y+z}}\int_{-1}^{+1}\left(e^{i\sqrt{y+z}\sqrt{1-v^2}} - e^{-i\sqrt{y+z}\sqrt{1-v^2}}\right)dv$$

$$= \frac{2}{\sqrt{y+z}}\int_{-1}^{+1}\sin\left(\sqrt{y+z}\cdot\sqrt{1-v^2}\right)dv\,.$$

Man hat daher, zusammengestellt, für die Function J^1 folgende bemerkenswerthe Gleichungen:

$$(1.)\quad\begin{cases} J^1(\sqrt{y+z}) = \dfrac{\sqrt{y+z}}{2\pi}\displaystyle\iint e^{i(u\sqrt{y}+v\sqrt{z})}\,du\,dv \\ \qquad\qquad\;\; = \dfrac{\sqrt{y+z}}{2\pi}\displaystyle\iint e^{iu\sqrt{y+z}}\,du\,dv\,, \end{cases}$$

wo $u^2 + v^2 \overline{\lessgtr} 1$ ist; und weiter

$$(2.)\quad\begin{cases} J^1(\sqrt{y+z}) = \dfrac{\sqrt{y+z}}{\pi\sqrt{z}}\displaystyle\int_{-1}^{+1} e^{iu\sqrt{y}}\sin\left(\sqrt{z}\sqrt{1-u^2}\right)\cdot du \\ \qquad\qquad\;\; = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-1}^{+1}\sin\left(\sqrt{y+z}\sqrt{1-u^2}\right)\cdot du\,; \end{cases}$$

und darum auch

$$J^1(z) = \frac{z}{\pi}\int_{-1}^{+1}\cos(zu)\sqrt{1-u^2}\cdot du = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\sin\left(z\sqrt{1-u^2}\right)\cdot du,$$

oder, wenn man darin einmal $u = \cos\omega$, dann $u = \sin\omega$ setzt:

$$(3.)\quad\begin{cases} J^1(z) = \dfrac{z}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\cos(z\cos\omega)\sin^2\omega\cdot d\omega = \dfrac{z}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\cos(z\sin\omega)\cos^2\omega\cdot d\omega \\ \qquad\;\; = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\sin(z\sin\omega)\sin\omega\cdot d\omega = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\sin(z\cos\omega)\cos\omega\cdot d\omega. \end{cases}$$

§. 6. Entwickelung von $J^{\nu}_{(z)}$ nach Potenzen von z.

Mit Hilfe der Formel (VI.) lässt sich $J^{\nu}_{(z)}$ bequem in eine nach Potenzen von z fortlaufende Reihe entwickeln. Wir setzen nämlich in (VI.) $z = 0$ und $h = z$, und erhalten:

$$\frac{J^{\nu}_{(\sqrt{z})}}{z^{\frac{\nu}{2}}} = \sum(-1)^p\cdot\frac{z^p}{2^p\,|2}\left(\frac{J^{\nu+p}_{(\sqrt{z})}}{z^{\frac{\nu+p}{2}}}\right)_{z=0}\,.$$

Es is aber

$$\left(\frac{J^{\nu+p}_{(\sqrt{z})}}{z^{\frac{\nu+p}{2}}}\right)_{z=0} = \frac{1}{\sqrt{\pi}\cdot 2^{\nu+p}\Gamma(\nu+p+\frac{1}{2})}\int_0^\pi \sin^{2\nu+2p}\omega\cdot d\omega\,.$$

Setzt man in dem letzteren Integrale $\cos\omega = 2x - 1$, folglich $\sin\omega = 2\sqrt{x(1-x)}$, $d\omega = -\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$, so wird

$$\int_0^\pi \sin^{2\nu+2p}\omega\cdot d\omega = 2^{2\nu+2p}\int_0^1 x^{\nu+p-\frac{1}{2}}(1-x)^{\nu+p-\frac{1}{2}}dx$$

$$= 2^{2\nu+2p}\cdot \Phi(\nu+p+\tfrac{1}{2},\, \nu+p+\tfrac{1}{2})$$

$$= 2^{2\nu+2p}\,\frac{(\Gamma(\nu+p+\frac{1}{2}))^2}{\Gamma(2\nu+2p+1)}\,.$$

Man hat also

$$\left(\frac{J^{\nu+p}_{(\sqrt{z})}}{z^{\frac{\nu+p}{2}}}\right)_{z=0} = \frac{2^{\nu+p}\Gamma(\nu+p+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}\cdot\Gamma(2\nu+2p+1)}\,.$$

Nun ist

$$\Gamma(2\nu+2p+1) = \frac{2^{2\nu+2p}}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma(\nu+p+\tfrac{1}{2})\,.\,\Gamma(\nu+p+1)\,,$$

folglich

$$\left(\frac{J^{\nu+p}_{(\sqrt{z})}}{z^{\frac{\nu+p}{2}}}\right)_{z=0} = \frac{1}{2^{\nu+p}\Gamma(\nu+p+1)} = \frac{1}{2^\nu(2\nu+2)^{p|2}\Gamma(\nu+1)}\,.$$

Setzt man diesen Werth oben ein, und schreibt z^2 statt z, so lautet die gesuchte Reihe

$$\text{(VIII.)}\qquad J^\nu_{(z)} = \frac{z^\nu}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}\cdot\sum(-1)^p\cdot\frac{z^{2p}}{2^{p|2}(2\nu+2)^{p|2}}\,.$$

Als unendliche Reihe betrachtet, convergirt dieselbe für jeden Werth von z; bricht man sie aber mit dem $(n+1)^{\text{ten}}$ Gliede ab, so muss noch das Ergänzungsglied

$$(-1)^{n+1}\cdot\frac{z^{\nu+2n+2}}{2^{n+1|2}}\cdot\frac{J^{\nu+n+1}_{(\Theta z)}}{(\Theta z)^{\nu+n+1}}$$

hinzugefügt werden.

Um aus der Formel (VIII.), welche, weil bei ihrer Ableitung die Gleichung (I.) benutzt wurde, nur für $\nu > -\frac{1}{2}$ gilt, die speciellere für ein positiv ganzes $\nu(=n)$ herzuleiten, berücksichtigen wir, dass

$$\Gamma(n+1) = n! = 1^{n|1}$$

ist, und erhalten sogleich

$$\text{(VIII. a.)} \qquad J^n_{(z)} = \sum (-1)^p \cdot \frac{z^{n+2p}}{2^{p|2}\, 2^{n+p|2}}$$

und daraus noch specieller für $n = 0$ und $n = 1$:

$$J^0_{(z)} = \sum (-1)^p \cdot \frac{z^{2p}}{(2^{p|2})^2} = \sum (-1)^p \cdot \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2p}}{(p!)^2}$$

und

$$J^1_{(z)} = z \sum (-1)^p \cdot \frac{z^{2p}}{2^{p|2}\, 2^{p+1|2}} = \frac{z}{2} \sum (-1)^p \cdot \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2p}}{p!\,(p+1)!}.$$

Beiläufig sei noch bemerkt, dass in allen Summen, denen für den veränderlichen Buchstaben (hier p) nicht besonders Grenzen beigeschrieben sind, demselben nach und nach alle positiv ganzen Werthe von 0 bis ∞, die Null mit eingeschlossen, beigelegt zu denken sind.

§. 7. Andere Reihenentwickelung.

Um eine von der vorigen verschiedene, aber ebenfalls nach steigenden Potenzen von z fortlaufende Entwickelung von $J^\nu_{(z)}$ zu erhalten, setzen wir in dem Integral

$$\int_{-1}^{+1} \cos zu\, (1-u^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \cdot du$$

$u = 1 - v$. Dasselbe verwandelt sich dadurch in

$$\int_0^2 \cos z\,(1-v)\, [v(2-v)]^{\nu-\frac{1}{2}} \cdot dv,$$

oder, wenn man den Cosinus entwickelt, in

$$\cos z \int_0^2 \cos zv\, [v(2-v)]^{\nu-\frac{1}{2}} \cdot dv + \sin z \int_0^2 \sin zv\, [v(2-v)]^{\nu-\frac{1}{2}} \cdot dv.$$

Indem man hierin $\cos zv$ und $\sin zv$ resp. durch die Reihen $1 - \frac{z^2 v^2}{2!} + \frac{z^4 v^4}{4!} - \cdots$ und $zv - \frac{z^3 v^3}{3!} + \frac{z^5 v^5}{5!} - \cdots$ ersetzt und dann Glied für Glied integrirt, erhält man für jedes dieser beiden Integrale eine nach positiven steigenden Potenzen fort-

schreitende Reihe. Bezeichnen wir diese Reihen einstweilen mit M und N, so haben wir

$$(1.)\qquad J_{(z)}^{\nu} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{z^{\nu}}{2^{\nu}\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\,(M\cos z + N\sin z)\,.$$

Wendet man dieselbe Transformation an auf das Integral

$$\int_{-1}^{+1} \sin zu\,(1-u^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\,.\,du\,,$$

dessen Werth Null ist, so gelangt man zur Gleichung

$$(2.)\qquad 0 = M\sin z - N\cos z\,.$$

Eliminirt man nun aus (1.) und (2.) zuerst N, dann M, so erhält man

$$(3.)\qquad J_{(z)}^{\nu}\,.\,\cos z = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{z^{\nu}}{2^{\nu}\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\,M\,,$$

$$(4.)\qquad J_{(z)}^{\nu}\,.\,\sin z = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{z^{\nu}}{2^{\nu}\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\,N\,.$$

Um daher die Reihen M und N zu entwickeln, brauchen wir nur die im vorhergehenden Paragraphen für $J_{(z)}^{\nu}$ angegebene Reihe resp. mit den bekannten Reihen für $\cos z$ und $\sin z$ zu multipliciren. Indem man dabei in geeigneter Weise zusammenzieht, findet man

$$M = \sqrt{\pi} \cdot \frac{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu+1)} \left\{1 - \frac{2\nu+3}{2\nu+2} \cdot \frac{z^2}{2!} + \frac{(2\nu+5)(2\nu+7)}{(2\nu+2)(2\nu+4)} \cdot \frac{z^4}{4!} - \right.$$
$$\left. - \frac{(2\nu+7)(2\nu+9)(2\nu+11)}{(2\nu+2)(2\nu+4)(2\nu+6)} \cdot \frac{z^6}{6!} + \cdots \right\}$$
$$= \sqrt{\pi} \cdot \frac{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu+1)} \sum (-1)^p \cdot \frac{(2\nu+2p+1)^{p|2}}{(2\nu+2)^{p|2}} \cdot \frac{z^{2p}}{(2p)!}$$

und

$$N = \sqrt{\pi} \cdot \frac{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu+1)} \left\{z - \frac{2\nu+5}{2\nu+2} \cdot \frac{z^3}{3!} + \frac{(2\nu+7)(2\nu+9)}{(2\nu+2)(2\nu+4)} \cdot \frac{z^5}{5!} - \right.$$
$$\left. - \frac{(2\nu+9)(2\nu+11)(2\nu+13)}{(2\nu+2)(2\nu+4)(2\nu+6)} \cdot \frac{z^7}{7!} + \cdots \right\}$$
$$= \sqrt{\pi} \cdot \frac{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu+1)} \sum (-1)^p \cdot \frac{(2\nu+2p+3)^{p|2}}{(2\nu+2)^{p|2}} \cdot \frac{z^{2p+1}}{(2p+1)!}\,.$$

Wir erhalten daher für $J_{(z)}^{\nu}$ folgende, für jeden Werth von z convergente Entwickelungen

$$(5).\quad J_{(z)}^{\nu} \cdot \cos z = \frac{z^{\nu}}{2^{\nu}\,\Gamma(\nu+1)} \sum (-1)^p \cdot \frac{(2\nu+2p+1)^{p|2}}{(2\nu+2)^{p|2}} \cdot \frac{z^{2p}}{(2p)!}\,,$$

$$(6).\quad J^{\nu}_{(z)}\,.\sin z = \frac{z^{\nu}}{2^{\nu}\,\Gamma(\nu+1)}\sum(-1)^{p}\,.\,\frac{(2\nu+2p+3)^{p|2}}{(2\nu+2)^{p|2}}\,.\,\frac{z^{2p+1}}{(2p+1)!}\,.$$

$$(7).\quad J^{\nu}_{(z)} = \frac{z^{\nu}\cos z}{2^{\nu}\,\Gamma(\nu+1)}\sum(-1)^{p}\,.\,\frac{(2\nu+2p+1)^{p|2}}{(2\nu+2)^{p|2}}\,.\,\frac{z^{2p}}{(2p)!}$$

$$+\frac{z^{\nu}\sin z}{2^{\nu}\,\Gamma(\nu+1)}\sum(-1)^{p}\,.\,\frac{(2\nu+2p+3)^{p|2}}{(2\nu+2)^{p|2}}\,.\,\frac{z^{2p+1}}{(2p+1)!}\,.$$

Aus dem blossen Anblick der Gleichungen (3.) und (4.) erhellt, dass die Reihe M Null ist für $z=\frac{1}{2}\pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{5}{2}\pi\ \ldots$ überhaupt für $z=\frac{2m+1}{2}\pi$, was auch ν sein mag; und dass ebenso N für $z=m\pi$ verschwindet.

§. 8. Integralformeln für $J^{\nu}_{(z)}$.

Durch Umkehrung der Sätze des §. 2. erhalten wir eine entsprechende Reihe von Integralformeln. Aus (III. a.) ergibt sich durch $m$malige Integration nach z:

$$\int^{m} z^{-\frac{\nu+m}{2}} J^{\nu+m}_{(\sqrt{z})}\,.\,dz^{m} = (-2)^{m}\,.\,z^{-\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{z})}$$

$$+(-2)^{m}\sum_{p=0}^{p=m-1} C_{p}\,.\,z^{p}\,,$$

wo die bei der wiederholten Integration eingehenden m willkürlichen Constanten, unter dem Summenzeichen zur Rechten, mit C_p bezeichnet sind. Um diese Constanten unter der Voraussetzung, dass jede Integration von 0 bis z ausgeführt wird, zu bestimmen, differentiiren wir die vorstehende Gleichung wieder $n$mal nach z, und erhalten

$$\int^{m-n} z^{-\frac{\nu+m}{2}} J^{\nu+m}_{(\sqrt{z})}\,.\,dz^{m-n} = (-2)^{m-n}\,.\,z^{-\frac{\nu+n}{2}} J^{\nu+n}_{(\sqrt{z})}$$

$$+(-2)^{m}\sum_{p=n}^{p=m-1} C_{p}\,.\,p^{n|-1}\,.\,z^{p-n}\,.$$

In der Summe zur Rechten können wir p, statt von n bis $m-1$, ebenso gut auch von 0 bis $m-n-1$ gehen lassen, nur müssen wir alsdann $p+n$ statt p schreiben. Die Summe lautet jetzt:

$$(-2)^{m}\sum_{p=0}^{p=m-n-1} C_{p+n}\,.\,(p+n)^{n|-1}\,z^{p}\,.$$

Setzt man nun $z = 0$, so erhält man, weil unter der oben gemachten Voraussetzung das Integral zur Linken verschwindet:

$$(-2)^{m-n} \left(\frac{\overset{\nu+n}{J}(\sqrt{z})}{z^{\frac{\nu+n}{2}}} \right)_{z=0} + (-2)^m \, . \, n! \, C_n = 0 \, .$$

Da nun, dem vorhergehenden Paragraphen zu Folge,

$$\left(\frac{\overset{\nu+n}{J}(\sqrt{z})}{z^{\frac{\nu+n}{2}}} \right)_{z=0} = \frac{1}{2^\nu (2\nu+2)^{n|2} \, \Gamma(\nu+1)} \, ,$$

so haben wir

$$C_n = - \frac{(-1)^n}{2^\nu \, \Gamma(\nu+1) \, . \, 2^{n|2} (2\nu+2)^{n|2}} \, .$$

Setzt man dieses Resultat in die erste Gleichung ein, so hat man, wenn jede Integration von 0 bis z ausgeführt gedacht wird:

$$(1.) \quad \int^m z^{-\frac{\nu+m}{2}} \overset{\nu+m}{J}(\sqrt{z}) \, . \, dz^m = (-2)^m \, . \, z^{-\frac{\nu}{2}} \overset{\nu}{J}(\sqrt{z})$$
$$- \frac{(-2)^m}{2^\nu \, \Gamma(\nu+1)} \sum_{p=1}^{p=m-1} \frac{(-1)^p \, . \, z^p}{2^{p|2} (2\nu+2)^{p|2}} \, .$$

Für $m = 1$ ergibt sich daraus speciell:

$$(1.a.) \quad \int_0^z z^{-\frac{\nu+1}{2}} \overset{\nu+1}{J}(\sqrt{z}) \, . \, dz = -2 \, . \, z^{-\frac{\nu}{2}} \overset{\nu}{J}(\sqrt{z}) + \frac{2}{2^\nu \, \Gamma(\nu+1)} \, .$$

Wird ebenso die Formel (IV.b.) des §. 2. $m$mal nach z integrirt, so kommt zunächst

$$\int^m z^{\frac{\nu}{2}} \overset{\nu}{J}(\sqrt{z}) \, . \, dz^m = 2^m \, . \, z^{\frac{m+\nu}{2}} \overset{m+\nu}{J}(\sqrt{z})$$
$$+ c_{m-1} z^{m-1} + \cdots + c_2 z^2 + c_1 z + c_0 \, .$$

Gehen sämmtliche Integrationen von 0 bis z, so verschwinden alle willkührlichen Constanten, und man hat einfach:

$$(2.) \quad \int^m z^{\frac{\nu}{2}} \overset{\nu}{J}(\sqrt{z}) \, dz^m = 2^m \, . \, z^{\frac{m+\nu}{2}} \overset{m+\nu}{J}(\sqrt{z})$$

und speciell für $m = 1$:

$$(2.a.) \quad \int_0^z z^{\frac{\nu}{2}} \overset{\nu}{J}(\sqrt{z}) \, . \, dz = 2 z^{\frac{\nu+1}{2}} \overset{\nu+1}{J}(\sqrt{z}) \, .$$

Zwei weitere Integralformeln resultiren aus den Gleichungen (1.) und (2.) des §. 2., nämlich

$$(3.)\qquad \int_0^z z^{-\nu} J_{(z)}^{\nu+1} \, . \, dz = - z^{-\nu} J_{(z)}^{\nu} + \frac{1}{2^{\nu} \Gamma(\nu+1)}$$

und

$$(4.)\qquad \int_0^z z^{\nu} J_{(z)}^{\nu-1} \, . \, dz = z^{\nu} J_{(z)}^{\nu} \, .$$

Hier wie oben ist die Bestimmung der willkührlichen Constanten unter der Annahme $\nu > -\frac{1}{2}$ ausgeführt; es gelten jedoch sämmtliche Formeln, von den Constanten abgesehen, auch für beliebig negative ν.

Eine weitere brauchbare Formel erhalten wir durch Umkehrung der am Ende des §. 3. entwickelten Gleichung

$$\frac{\partial^{2m}\left(z^{\frac{m}{2}} J^{m}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial z^{2m}} = \frac{(-1)^m}{2^{2m}} \, . \, z^{-\frac{m}{2}} J^{m}_{(\sqrt{z})} \, .$$

Integrirt man dieselbe $2m$mal nach z, so folgt

$$(5.)\qquad \int^{2m} z^{-\frac{m}{2}} J^{m}_{(\sqrt{z})} \, . \, dz^{2m} = (-1)^m \, . \, 2^{2m} \, . \, z^{\frac{m}{2}} J^{m}_{(\sqrt{z})} \, ,$$

wo wiederum keine willkührlichen Constanten beizufügen sind, wenn alle Integrationen zwischen 0 und z sich bewegen.

Beispielsweise ergibt sich daraus für $m=1$:

$$\int_0^z\int_0^z \frac{J^1(\sqrt{z})}{\sqrt{z}} \cdot dz^2 = - 4 \, . \sqrt{z} \, . \, J^1(\sqrt{z}) \, .$$

Schliesslich möge noch auf ein bestimmtes Integral aufmerksam gemacht werden, welches aus der Formel (3.) hervorgeht, wenn man dort die obere Grenze $=\infty$ setzt. Wie später gezeigt werden wird, verschwindet $J_{(z)}^{\nu}$ für $z=\infty$, und man hat daher

$$(6.)\qquad \int_0^\infty z^{-\nu} J_{(z)}^{\nu+1} \, . \, dz = \frac{1}{2^{\nu} \Gamma(\nu+1)} \, .$$

§. 9. Folgerungen aus den Formeln des §. 5.

Aus den Formeln (VI.) und (VII.) des §. 5. lassen sich einige interessante Reihenentwickelungen ableiten Setzt man nämlich

in (VI.) z^2 statt z und kz^2 statt h, so erhält man, wenn das Ergänzungsglied weggelassen und die Reihe ins Unendliche fortgesetzt gedacht wird, zunächst

$$J^{\nu}_{(z\sqrt{1+k})} = (1+k)^{\frac{\nu}{2}} \sum (-1)^p \cdot \frac{(kz)^p}{2^{p|2}} \cdot J^{\nu+p}_{(z)},$$

oder, wenn man λ^2 statt $1+k$ schreibt:

$$(1.) \qquad J^{\nu}_{(\lambda z)} = \lambda^{\nu} \sum (-1)^p \cdot \frac{(\lambda^2-1)^p}{2^{p|2}} \cdot z^p \cdot J^{\nu+p}_{(z)}$$

und daraus speciell für $\lambda = \sqrt{2}$:

$$(2.) \qquad J^{\nu}_{(z\sqrt{2})} = 2^{\frac{\nu}{2}} \sum (-1)^p \cdot \frac{z^p}{2^{p|2}} \cdot J^{\nu+p}_{(z)}.$$

Setzt man ferner in (VI.) z^2 statt z und $-z^2$ statt h, und bedenkt, dass

$$\left(\frac{J^{\nu}_{(z)}}{z^{\nu}}\right)_{z=0} = \frac{1}{\sqrt{\pi} \, . \, 2^{\nu} \, . \, \Gamma(\nu+\frac{1}{2})} \int_0^{\pi} \sin^{2\nu} \omega \, . \, d\omega = \frac{1}{2^{\nu}\,\Gamma(\nu+1)}$$

ist, so hat man

$$(3.) \qquad \sum \frac{z^p}{2^{p|2}} \cdot J^{\nu+p}_{(z)} = \frac{z^{\nu}}{2^{\nu}\,\Gamma(\nu+1)}.$$

Für $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ ergeben sich daraus folgende speciellere Formeln:

$$(3.a.) \quad \left\{ \begin{array}{l}
J^0 + \frac{z}{2} J^1 + \frac{z^2}{2\cdot 4} \cdot J^2 + \frac{z^3}{2\cdot 4\cdot 6} \cdot J^3 + \cdots = 1 \\
J^1 + \frac{z}{2} J^2 + \frac{z^2}{2\cdot 4} \cdot J^3 + \frac{z^3}{2\cdot 4\cdot 6} \cdot J^4 + \cdots = \frac{z}{2} \\
J^2 + \frac{z}{2} J^3 + \frac{z^2}{2\cdot 4} \cdot J^4 + \frac{z^3}{2\cdot 4\cdot 6} \cdot J^5 + \cdots = \frac{z^2}{2\cdot 4} \\
J^3 + \frac{z}{2} J^4 + \frac{z^2}{2\cdot 4} \cdot J^5 + \frac{z^3}{2\cdot 4\cdot 6} \cdot J^6 + \cdots = \frac{z^3}{2\cdot 4\cdot 6} \\
\cdot \; \cdot
\end{array} \right.$$

Wenn man daher die Glieder der unendlichen Reihe

$$e^{\frac{1}{2}z} = 1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2\cdot 4} + \frac{z^3}{2\cdot 4\cdot 6} + \cdots$$

folgeweise mit $J^0, J^1, J^2, \ldots,$ oder mit $J^1, J^2, J^3, \ldots,$ oder mit $J^2, J^3, J^4, \ldots$ u. s. w. multiplicirt, so erhält man als Resultate nach und nach die einzelnen Glieder der nämlichen Reihe $e^{\frac{1}{2}z}$.

Aus (VII.) findet man, wenn man daselbst ebenfalls z^2 statt z und $-z^2$ statt h substituirt, und wenn ν grösser als 0 ist:

$$(4.)\qquad \sum (-1)^p \cdot \frac{z^{\nu+p}}{2^{p|2}} J_{(z)}^{\nu-p} = 0\,.$$

Ist hier ν positiv ganz $= m+1$, so kann diese Reihe in zwei zerlegt werden, deren eine endlich ist und nur Bessel'sche Functionen mit positiven Exponenten enthält, während in der andern unendlichen nur solche mit negativen Exponenten, nebst J^0, vorkommen. Man hat nämlich statt der vorigen Gleichung, wenn man $\nu = m+1$ setzt, und den Factor z^{m+1} unterdrückt:

$$\sum_{p=0}^{p=m} (-1)^p \cdot \frac{z^p}{2^{p|2}} J_{(z)}^{m+1-p} + \sum_{p=m+1}^{p=\infty} (-1)^p \cdot \frac{z^p}{2^{p|2}} \cdot J_{(z)}^{m+1-p} = 0\,.$$

Schreibt man nun in der zweiten Summe, mit Rücksicht auf Gleichung (V.a.) in §. 3., $(-1)^{m+1-p} J^{p-m-1}$ statt J^{m+1-p}, so wird die vorhergehende

$$\sum_{p=0}^{p=m} (-1)^p \cdot \frac{z^p}{2^{p|2}} J_{(z)}^{m+1-p} - (-1)^m \sum_{p=m+1}^{p=\infty} \frac{z^p}{2^{p|2}} J_{(z)}^{p-m-1} = 0\,,$$

oder, wenn man in der zweiten Summe lieber $p+m+1$ statt p schreibt, und dann p von 0 bis ∞ gehen lässt:

$$\sum \frac{z^{m+1+p}}{2^{m+1+p|2}} J_{(z)}^p = \sum_{p=0}^{p=m} (-1)^{m+p} \cdot \frac{z^p}{2^{p|2}} J_{(z)}^{m+1-p}\,,$$

oder auch, wenn man die Glieder der endlichen Reihe zur Rechten nur umgekehrt anordnet:

$$(4.a.)\qquad \sum \frac{z^{m+1+p}}{2^{m+1+p|2}} \cdot J_{(z)}^p = \sum_{p=0}^{p=m} (-1)^p \cdot \frac{z^{m-p}}{2^{m-p|2}} \cdot J_{(z)}^{p+1}\,.$$

Für $m = 0, 1, 2, \ldots$ geht daraus folgende Gruppe hervor:

$$(4.b.)\quad \begin{cases} \frac{z}{2} J^0 + \frac{z^2}{2\cdot 4} J^1 + \frac{z^3}{2\cdot 4\cdot 6} J^2 + \cdots = J^1 \\ \frac{z^2}{2\cdot 4} J^0 + \frac{z^3}{2\cdot 4\cdot 6} J^1 + \frac{z^4}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} J^2 + \cdots = \frac{z}{2} J^1 - J^2 \\ \frac{z^3}{2\cdot 4\cdot 6} J^0 + \frac{z^4}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} J^1 + \frac{z^5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10} J^2 + \cdots = \frac{z^2}{2\cdot 4} J^1 - \frac{z}{2} J^2 + J^3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Diese Reihe von Gleichungen hätte man übrigens auch dadurch erhalten können, dass man in der ersten Gleichung der Gruppe (3.a.) $\sqrt{z}$ statt z gesetzt, dieselbe sodann gemäss (IV.a.) m mal differentiirt und nachträglich wieder z^2 statt z geschrieben hätte.

Wird von der mit $\frac{z}{2}$ multiplicirten ersten Gleichung der Gruppe (4. b.) die zweite abgezogen, so kommt

$$\frac{z^2}{2\cdot 4} J^0 + \frac{2\,z^3}{2\cdot 4\cdot 6} J^1 + \frac{3\,z^4}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} J^2 + \frac{4\,z^5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10} J^3 + \cdots = J^2.$$

Multiplicirt man ferner die zweite Gleichung mit $\frac{z}{4}$, zieht die dritte davon ab, und combinirt die so erhaltene Formel in geeigneter Weise mit der vorstehenden, so ergibt sich:

$$\frac{z^3}{2\cdot 4\cdot 6} J^0 + \frac{3\,z^4}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} J^1 + \frac{6\,z^5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10} J^2 + \frac{10\,z^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12} J^3 + \cdots = J^3.$$

Auf diesem Wege kann jede der Functionen $J^1, J^2, J^3, \ldots, J^{m+1}$ durch alle übrigen von J^0 an ausgedrückt werden. Man bemerkt, dass in den Zählern der Coefficienten die figurirten Zahlen der 0ten, 1., 2., 3., ... Ordnung auftreten.

In übersichtlicher Schreibweise lauten die entsprechenden Formeln:

$$(5.)\quad \begin{cases} J^1 = \sum \dfrac{z^{p+1}}{2^{p+1|2}} J^p \\ J^2 = \sum \dfrac{(p+1)\,z^{p+2}}{2^{p+2|2}} J^p \\ J^3 = \sum \dfrac{(p+1)\,(p+2)}{1\cdot 2} \cdot \dfrac{z^{p+3}}{2^{p+3|2}} \cdot J^p \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ J^{m+1} = \sum \dfrac{(p+1)^{m|1}}{m!} \cdot \dfrac{z^{p+m+1}}{2^{p+m+1|2}} \cdot J^p . \end{cases}$$

Die allgemeine Geltung der letzteren kann durch folgendes Inductionsverfahren dargethan werden. Nachdem $\sqrt{z}$ statt z gesetzt und beiderseits mit $z^{-\frac{m+1}{2}}$ multiplicirt worden ist, differentiire man nach z, wobei links die Grundformel (III.), rechts aber (IV.) zur Anwendung kommt. Dadurch erhält man:

$$z^{-\frac{m+2}{2}} \overset{m+2}{J}(\sqrt{z}) = -\sum \frac{(p+1)^{m|1}}{m!} \cdot \frac{z^{\frac{p-1}{2}}}{2^{p+m+1|2}} \overset{p-1}{J}(\sqrt{z}),$$

oder, wenn rechts das erste Glied abgesondert, $-J^1$ statt J^{-1} gesetzt und beiderseits mit $z^{-\frac{m+2}{2}}$ multiplicirt wird:

$$\overset{m+2}{J}(\sqrt{z}) = \frac{z^{\frac{m+1}{2}}}{2^{m+1|2}} \cdot \overset{1}{J}(\sqrt{z}) - \sum \frac{(p+2)^{m|1}}{m!} \cdot \frac{z^{\frac{p+m+2}{2}}}{2^{p+m+2|2}} \cdot \overset{p}{J}(\sqrt{z}) .$$

Substituirt man hierin statt $J^1_{(\sqrt{z})}$ die obige Reihe (5.), nachdem man $\sqrt{z}$ statt z in sie eingesetzt, so kommt:

$$J^{m+2}_{(\sqrt{z})} = \sum \frac{z^{\frac{p+m+2}{2}}}{2^{m+1|2}\, 2^{p+1|2}} \cdot J^p_{(\sqrt{z})} - \sum \frac{(p+2)^{m|1}}{m!} \cdot \frac{z^{\frac{p+m+2}{2}}}{2^{p+m+2|2}} \cdot J^p_{(\sqrt{z})}$$

$$= \sum \left(\frac{1}{2^{m+1|2}\, 2^{p+1|2}} - \frac{(p+2)^{m|1}}{m!\, 2^{p+m+2|2}} \right) \cdot z^{\frac{p+m+2}{2}}\, J^p_{(\sqrt{z})}.$$

Nun ist aber, wie man sich leicht überzeugt

$$\frac{1}{2^{m+1|2}\, 2^{p+1|2}} - \frac{(p+2)^{m|1}}{m!\, 2^{p+m+2|2}} = \frac{(p+1)^{m+1|1}}{(m+1)!\, 2^{p+m+2|2}}.$$

Man hat demnach

$$J^{m+2}_{(\sqrt{z})} = \sum \frac{(p+1)^{m+1|1}}{(m+1)!} \cdot \frac{z^{\frac{p+m+2}{2}}}{2^{p+m+2|2}} \cdot J^p_{(\sqrt{z})},$$

d. i. die letzte Gleichung der Gruppe (5.), mit dem Unterschied, dass $m+1$ statt m und $\sqrt{z}$ statt z steht. Wenn daher jene für irgend einen Werth von m richtig ist, so gilt sie jedesmal auch für den nächsthöheren, folglich allgemein.

Durch Addition sämmtlicher Gleichungen der Gruppe (3. a.) erhält man:

$$(6.)\quad e^{\frac{z}{2}} = \sum J^p + \frac{z}{2} \sum J^{p+1} + \frac{z^2}{2\cdot 4} \cdot \sum J^{p+2} + \cdots$$

Die Summen $J^0 + J^1 + J^2 + \cdots$, $J^1 + J^2 + J^3 + \cdots$, $J^2 + J^3 + J^4 + \cdots$ u. s. w., haben demnach die merkwürdige Eigenschaft, dass der Werth der unendlichen Reihe

$$e^{\frac{1}{2}z} = 1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2\cdot 4} + \frac{z^3}{2\cdot 4\cdot 6} + \cdots$$

nicht geändert wird, wenn man deren Glieder der Reihe nach mit jenen Summen multiplicirt.

Addirt man ferner die erste, dritte, fünfte ... Gleichung der Gruppe (3. a.), nachdem dieselben vorher abwechselnd mit entgegengesetzten Vorzeichen versehen worden sind, sodann in gleicher Weise die zweite, vierte, sechste ..., so kommt man auf folgende zwei Formeln:

$$(7.)\quad \cos\tfrac{1}{2}z = \sum(-1)^p J^{2p} + \frac{z}{2}\sum(-1)^p J^{2p+1} + \frac{z^2}{2\cdot 4}\sum(-1)^p J^{2p+2} + \cdots$$

$$(8.)\quad \sin\tfrac{1}{2}z = \sum(-1)^p J^{2p+1} + \frac{z}{2}\sum(-1)^p J^{2p+2} + \frac{z^2}{2\cdot 4}\sum(-1)^p J^{2p+3} + \cdots$$

Multiplicirt man die erste der Gleichungen (3. a.) mit J^n, die zweite mit J^{n+1}, u. s. f., und addirt sämmtliche, so findet man

$$\sum J^p J^{p+n} + \frac{z}{2} \sum J^{p+1} J^{p+n} + \frac{z^2}{2\cdot 4} \sum J^{p+2} J^{p+n} + \cdots = \frac{z^n}{2^{n|2}}.$$

Darin ist n unveränderlich, dem p aber müssen in jeder Summe alle positiv ganzen Werthe von 0 bis ∞ beigelegt werden.

Denkt man sich die Gleichung (9.) für alle n-Werthe von 0 bis ∞ angeschrieben, und addirt sämmtliche einzelne Gleichungen, so erhält man die mit (6.) analoge Formel:

$$(10.)\quad e^{\frac{z}{2}} = \sum\sum J^p J^{p+q} + \frac{z}{2} \sum\sum J^{p+1} J^{p+q} + \frac{z^2}{2\cdot 4} \sum\sum J^{p+2} J^{p+q} + \cdots,$$

wo die doppelten Summenzeichen bedeuten, dass sowohl dem p als dem q alle positiv ganzen Werthe von 0 bis ∞ beizulegen sind.

Man sieht, wie man dieses Verfahren in's Unendliche fortsetzen und immer neue derartige Formeln ableiten könnte.

Kehren wir jedoch schliesslich zu den oben gefundenen Gleichungen (2.) und (3.) zurück. Wird letztere mit $2^{\frac{\nu}{2}}$ multiplicirt und erstere zu ihr addirt oder von ihr abgezogen, so resultiren folgende zwei Gleichungen:

$$(11.)\quad \sum \frac{z^{2p}}{2^{2p|2}} \cdot J_{(z)}^{\nu+2p} = \frac{z^\nu}{2^{\nu+1}\Gamma(\nu+1)} + \frac{J^{\nu}_{(z\sqrt{2})}}{2^{\frac{\nu+2}{2}}},$$

$$(12.)\quad \sum \frac{z^{2p+1}}{2^{2p+1|2}} \cdot J_{(z)}^{\nu+2p+1} = \frac{z^\nu}{2^{\nu+1}\Gamma(\nu+1)} - \frac{J^{\nu}_{(z\sqrt{2})}}{2^{\frac{\nu+2}{2}}},$$

welche für $\nu = 0$ sich wie folgt gestalten:

$$(11.\text{a.})\quad 2\left\{J_{(z)}^0 + \frac{z^2}{2\cdot 4} \cdot J_{(z)}^2 + \frac{z^4}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} \cdot J_{(z)}^4 + \cdots\right\} = 1 + J^0_{(z\sqrt{2})},$$

$$(12.\text{a.})\quad 2\left\{\frac{z}{2} J_{(z)}^1 + \frac{z^3}{2\cdot 4\cdot 6} \cdot J_{(z)}^3 + \frac{z^5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10} \cdot J_{(z)}^5 + \cdots\right\} = 1 - J^0_{(z\sqrt{2})}.$$

Multiplicirt man endlich die Gleichungen der Gruppe (3. a.) der Reihe nach mit $1, -\frac{z}{2}, +\frac{z^2}{2\cdot 4}, -\frac{z^3}{2\cdot 4\cdot 6}, \ldots,$ und addirt sämmtliche, mit Rücksicht darauf, dass nach (VIII. a. §. 5.)

$$1 - \frac{z^2}{2\cdot 2} + \frac{z^4}{2\cdot 4\cdot 2\cdot 4} - \frac{z^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 2\cdot 4\cdot 6} + \cdots = J^0_{(z)}$$

und nach (2.) des gegenwärtigen Paragraphen:

$$J^0 - \frac{z}{2} J^1 + \frac{z^2}{2\cdot 4} J^2 - \frac{z^3}{2\cdot 4\cdot 6} J^3 + \cdots = \overset{0}{J}_{(z\sqrt{2})}$$

$$J^1 - \frac{z}{2} J^2 + \frac{z^2}{2\cdot 4} J^3 - \frac{z^3}{2\cdot 4\cdot 6} J^4 + \cdots = \frac{1}{\sqrt{2}} \overset{1}{J}_{(z\sqrt{2})}$$

$$J^2 - \frac{z}{2} J^3 + \frac{z^2}{2\cdot 4} J^4 - \frac{z^3}{2\cdot 4\cdot 6} J^5 + \cdots = \frac{1}{2} \overset{2}{J}_{(z\sqrt{2})}$$

. . . .

so findet man

$$J^0_{(z)} = \overset{0}{J}_{(z\sqrt{2})} + \frac{z}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \overset{1}{J}_{(z\sqrt{2})} + \frac{z^2}{2\cdot 4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \overset{2}{J}_{(z\sqrt{2})} + \cdots$$

oder

$$J^0_{(z)} = \sum \frac{z^p}{2^{p|2}} \frac{\overset{p}{J}_{(z\sqrt{2})}}{2^{\frac{p}{2}}},$$

oder auch, wenn man $z\sqrt{2}$ statt z setzt:

(13.) $$\overset{0}{J}_{(z\sqrt{2})} = \sum \frac{z^p}{2^{p|2}} \cdot J^p_{(2z)}.$$

§. 10. Entwickelung von $J^m_{(z+h)}$.

Der Taylor'sche Lehrsatz gibt

$$J^m_{(z+h)} = \sum \frac{h^p}{p!} \frac{\partial^p J^m_{(z)}}{\partial z^p}.$$

Nach Gleichung (6. §. 2.) ist aber

$$\frac{\partial^p J^m_{(z)}}{\partial z^p} = \left(\frac{1}{2}\right)^p \cdot \sum_{q=0}^{q=p} (-1)^q \cdot \frac{p^{q|-1}}{q!} J^{m-p+2q}_{(z)}.$$

Setzt man diesen Werth oben ein, so kommt man auf die Doppelreihe

$$J^m_{(z+h)} = \sum\sum (-1)^q \cdot \frac{p^{q|-1}}{p!\,q!} \cdot \frac{h^p}{2^p} J^{m-p+2q}_{(z)},$$

worin q nicht grösser als p zu nehmen ist, indem die Glieder, in welchen $q > p$, von selbst verschwinden. Man kann daher vorstehende Gleichung kürzer auch so

$$J^m_{(z+h)} = \sum\sum (-1)^q \cdot \frac{h^p}{2^p\,q!\,(p-q)!} J^{m-p+2q}_{(z)}$$

schreiben. Was den Index der Bessel'schen Function unter dem Summenzeichen betrifft, so können folgende drei Fälle eintreten. Entweder ist

$$m - p + 2q = 0 \quad , \text{ d. h. } p = m + 2q \, ,$$
oder
$$m - p + 2q = r + 1 \quad , \text{ d. h. } p = m + 2q - r - 1 \, ,$$
oder
$$m - p + 2q = -r - 1 \, , \text{ d. h. } p = m + 2q + r + 1 \, ,$$

worin unter r Null oder jede positive ganze Zahl zu verstehen ist. Substituirt man diese Werthe von p in obige Gleichung, so zerfällt jene Summe in deren drei, von denen jedoch die erste nur eine einfache ist. Man erhält nämlich

$$\begin{aligned} J^m_{(z+h)} = J^0_{(z)} \sum (-1)^q \cdot \frac{h^{m+2q}}{2^{q|2} 2^{m+q|2}} \\ + \sum \sum (-1)^q \cdot \frac{h^{m-r-1+2q}}{2^{q|2} 2^{m-r-1+q|2}} \cdot J^{r+1}_{(z)} \\ + \sum \sum (-1)^q \cdot \frac{h^{m+r+1+2q}}{2^{q|2} 2^{m+r+1+q|2}} \cdot J^{-(r+1)} \, . \end{aligned}$$

Nun ist aber, nach Gleichung (VIII. a. §. 5.)

$$\sum (-1)^q \cdot \frac{h^{m+2q}}{2^{q|2} 2^{m+q|2}} = J^m_{(h)} \, ,$$

ferner der Coefficient von $J^{r+1}_{(z)}$

$$\sum (-1)^q \cdot \frac{h^{m-r-1+2q}}{2^{q|2} 2^{m-r-1+q|2}} = J^{m-r-1}_{(h)}$$

und ebenso der Coefficient von $J^{-(r+1)}_{(z)}$

$$\sum (-1)^q \cdot \frac{h^{m+r+1+2h}}{2^{q|2} 2^{m+r+1+q|2}} = J^{m+r+1}_{(h)} \, ,$$

wo in den letzteren Summen r constant gedacht werden muss und das Summenzeichen sich also nur auf die Grösse q bezieht. Wir erhalten demnach folgende merkwürdige Gleichung

$$\text{(IX. a.)} \qquad \begin{aligned} J^m_{(z+h)} = J^m_{(h)} J^0_{(z)} + \Sigma J^{m-r-1}_{(h)} J^{r+1}_{(z)} \\ + \Sigma J^{m+r+1}_{(h)} J^{-(r+1)} \, , \end{aligned}$$

oder auch, weil z und h mit einander vertauscht werden dürfen

$$\text{(IX. b.)} \qquad \begin{aligned} J^m_{(z+h)} = J^0_{(h)} J^m_{(z)} + \Sigma J^{r+1}_{(h)} J^{m-r-1}_{(z)} \\ + \Sigma J^{-(r+1)}_{(h)} J^{m+r+1}_{(z)} \, . \end{aligned}$$

Für $m = 0$ geht daraus hervor.

(IX. c.) $$J^0_{(z+h)} = J^0_{(h)} J^0_{(z)} + 2\,\Sigma(-1)^{r+1} J^{r+1}_{(h)} J^{r+1}_{(z)}$$

oder

$$J^0_{(z+h)} = J^0_{(h)} J^0_{(z)} - 2\,J^1_{(h)} J^1_{(z)} + 2\,J^2_{(h)} \cdot J^2_{(z)} - $$
$$- 2\,J^3_{(h)} J^3_{(z)} + 2\,J^4_{(h)} J^4_{(z)} - \cdots,$$

woraus wiederum für $h = z$ die folgende Gleichung

$$J^0_{(2z)} = (J^0_{(z)})^2 - 2\,(J^1_{(z)})^2 + 2\,(J^2_{(z)})^2 - 2\,(J^3_{(z)})^2 + \cdots$$

resultirt.

Ebenso würde man, nach einer leicht ersichtlichen Umformung, für $m = 1$

(IX. d.) $$J^1_{(z+h)} = \Sigma(-1)^r J^{r+1}_{(h)} J^r_{(z)} + \Sigma(-1)^r \cdot J^r_{(h)} J^{r+1}_{(z)},$$

d. i.

$$J^1_{(z+h)} = J^1_{(h)} J^0_{(z)} - J^2_{(h)} J^1_{(z)} + J^3_{(h)} J^2_{(z)} - \cdots$$
$$+ J^0_{(h)} J^1_{(z)} - J^1_{(h)} J^2_{(z)} + J^2_{(h)} J^3_{(z)} - \cdots$$

erhalten. U. s. w. f.

§. 11. Umformung von $J^n_{(z)}$.

Um $J^n_{(z)}$, für ein positiv ganzes n, in anderer Form als in der durch die ursprüngliche Definition gegebenen zu erhalten, gehen wir aus von der Gleichung (I., §. 1)

$$J^n_{(z)} = \frac{z^n}{\pi \cdot 1^{n|2}} \cdot \int_{-1}^{+1} e^{izu} (1-u^2)^{n-\frac{1}{2}} \cdot du\,.$$

Nun ist bekanntlich

$$\int_a^b f(u) \cdot \frac{\partial^n F(u)}{\partial u^n} \cdot du = (-1)^n \int_a^b \frac{\partial^n f(u)}{\partial u^n} \cdot F(u) \cdot du\,,$$

wenn die Function $f(u)$ so beschaffen ist, dass $f(u)$, $\frac{\partial f(u)}{\partial u}$, ... $\frac{\partial^{n-1} f(u)}{\partial u^{n-1}}$ Null sind für $u = a$ und $u = b$. Ausserdem müssen selbstverständlich $\frac{\partial^n f(u)}{\partial u^n}$ und $\frac{\partial^n F(u)}{\partial u^n}$ innerhalb der Integrationsgrenzen endlich sein.

Nehmen wir $a = -1$, $b = +1$, $f(u) = (1-u^2)^{n-\frac{1}{2}}$, $F(u) = e^{izu}$, so sind die genannten Bedingungen erfüllt und wir erhalten

$$\int_{-1}^{+1} (1-u^2)^{n-\frac{1}{2}} \cdot \frac{\partial^n e^{izu}}{\partial u^n} \cdot du = (-1)^n \int_{-1}^{+1} \frac{\partial^n (1-u^2)^{n-\frac{1}{2}}}{\partial u^n} \cdot e^{izu} du.$$

Es ist aber

$$\frac{\partial^n e^{izu}}{\partial u^n} = i^n z^n e^{izu},$$

ferner

$$\frac{\partial^{n-1} (1-u^2)^{n-\frac{1}{2}}}{\partial u^{n-1}} = (-1)^{n-1} \cdot 1^{n|2} \cdot \frac{\sin n\omega}{n}, \text{ wenn } u = \cos\omega,$$

und darum auch

$$\frac{\partial^n (1-u^2)^{n-\frac{1}{2}}}{\partial u^n} = (-1)^{n-1} \cdot 1^{n|2} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{\partial \sin n\omega}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial u}$$

$$= (-1)^n \cdot 1^{n|2} \cdot \frac{\cos n\omega}{\sin \omega}.$$

Man erhält daher nach Substitution dieser Werthe, wenn zur Rechten $u = \cos\omega$ gesetzt wird,

$$i^n z^n \int_{-1}^{+1} e^{izu} (1-u^2)^{n-\frac{1}{2}} \cdot du = 1^{n|2} \int_0^\pi e^{iz\cos\omega} \cos n\omega \cdot d\omega,$$

oder, was dasselbe ist,

$$(1.) \qquad J^n_{(z)} = \frac{(-i)^n}{\pi} \int_0^\pi e^{iz\cos\omega} \cos n\omega \cdot d\omega,$$

eine Formel, welche für jedes positiv ganze n, die Null mit inbegriffen, giltig ist.

Aus der Theorie der Fourier'schen Reihen ist bekannt, dass für jeden Werth von ψ zwischen 0 und π

$$f(\psi) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(\omega) . d\omega + \frac{2}{\pi} \sum \cos(p+1)\psi \int_0^\pi f(\omega) \cos(p+1)\omega . d\omega$$

ist. Setzen wir hierin $f(\psi) = e^{iz\cos\psi}$, so ergibt sich mit Rücksicht auf (1.):

$$(2.) \qquad e^{iz\cos\psi} = J^0_{(z)} + 2 \Sigma i^{p+1} J^{p+1}_{(z)} . \cos(p+1)\psi.$$

Daraus folgen unmittelbar die zwei Gleichungen:

$$(3.) \quad \cos(z\cos\psi) = J^0 - 2J^2 \cos 2\psi + 2J^4 \cos 4\psi - 2J^6 \cos 6\psi + \cdots$$

$$(4.) \quad \sin(z\cos\psi) = 2J^1 \cos\psi - 2J^3 \cos 3\psi + 2J^5 \cos 5\psi - 2J^7 \cos 7\psi + \cdots$$



Setzt man darin $\psi = \frac{\pi}{2} - \omega$, so hat man weiter

(5.) $\cos(z \sin\omega) = J^0 + 2J^2 \cos 2\omega + 2J^4 \cos 4\omega + 2J^6 \cos 6\omega + \cdots$

(6.) $\sin(z \sin\omega) = 2J^1 \sin\omega + 2J^3 \sin 3\omega + 2J^5 \sin 5\omega + \cdots$

Aus den beiden letzteren Gleichungen ergibt sich im Hinblick auf die Theorie der Fourier'schen Reihen sofort:

$$(7.) \qquad J^{2n}_{(z)} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(z\sin\omega)\cos 2n\omega \, . \, d\omega \, ,$$

$$(8.) \qquad J^{2n+1}_{(z)} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(z\sin\omega)\sin(2n+1)\omega \, . \, d\omega \, .$$

Da nun offenbar

$$0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(z\sin\omega)\sin 2n\omega \, . \, d\omega$$

und

$$0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(z\sin\omega)\cos(2n+1)\omega \, . \, d\omega \, ,$$

so erhält man, wenn man die erste dieser Gleichungen zu (7.), die zweite zu (8.) addirt, aus beiden die folgende Formel, welche demnach für gerade und ungerade n giltig ist:

$$(9.) \qquad J^{n}_{(z)} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(z\sin\omega - n\omega) \, . \, d\omega \, .$$

Diese letztere Gleichung enthält die ursprünglich von Bessel gegebene Definition der Function $J^n_{(z)}$. Ich habe vorgezogen, die Eingangs gebrauchte Form als Definition zu benutzen, um den Begriff der Bessel'schen Function bequem auf beliebig reelle Werthe des Index ausdehnen zu können. Der Nutzen dieser Erweiterung wird in der Folge klar hervortreten.

Aus der Formel (1.) des gegenwärtigen Paragraphen lässt sich noch eine eigenthümliche Reductionsformel für $J^{2n}_{(z)}$ entwickeln; bekanntlich ist

$$\cos 2n\omega = \sum (-1)^p \, . \, \frac{(2n)^{p|-2}(2n)^{p|2}}{(2p)!} \sin^{2p}\omega \, .$$

Setzt man diesen Werth in (1.) ein, nachdem man daselbst $2n$ statt n geschrieben hat, so kommt

$$J_{(z)}^{2n} = \frac{(-1)^n}{\pi} \sum (-1)^p \cdot \frac{(2n)^{p|-2}(2n)^{p|2}}{(2p)!} \int_0^\pi e^{iz\cos\omega} \sin^{2p}\omega \,.\, d\omega\,,$$

oder

$$(10.)\qquad J_{(z)}^{2n} = (-1)^n \sum (-1)^p \cdot \frac{(2n)^{p|-2}(2n)^{p|2}}{2^{p|2}} \cdot \frac{J_{(z)}^p}{z^p}\,,$$

eine Formel, welche $J_{(z)}^{2n}$ durch $J_{(z)}^0$, $J_{(z)}^1$, ... bis $J_{(z)}^n$ auszudrücken erlaubt. Aus ihr gehen im Einzelnen folgende Gleichungen hervor:

$$(10.\text{a.})\begin{cases} J^0 = J^0 \\ J^2 = -J^0 + \frac{2\cdot 2}{2}\cdot\frac{J^1}{z} \\ J^4 = J^0 - \frac{4\cdot 4}{2}\cdot\frac{J^1}{z} + \frac{4\cdot 2\cdot 4\cdot 6}{2\cdot 4}\cdot\frac{J^2}{z^2} \\ J^6 = -J^0 + \frac{6\cdot 6}{2}\cdot\frac{J^1}{z} - \frac{6\cdot 4\cdot 6\cdot 8}{2\cdot 4}\cdot\frac{J^2}{z^2} + \frac{6\cdot 4\cdot 2\cdot 6\cdot 8\cdot 10}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{J^3}{z^3} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Die zweite derselben ist bereits in Gleichung (II.) enthalten.

§. 12. $J_{(z)}^n$ als Entwickelungscoefficient.

Die Bessel'sche Function $J_{(z)}^n$ mit ganzem Index wird auch als Coefficient der Entwickelung von $e^{\frac{1}{2}z\left(y-\frac{1}{y}\right)}$ nach (positiven und negativen) Potenzen von y definirt*). Es ist nämlich

$$e^{\frac{1}{2}zy} = \sum \frac{z^p y^p}{2^{p|2}}\,,$$

$$e^{-\frac{z}{2y}} = \sum \frac{(-1)^q z^q y^{-q}}{2^{q|2}}\,.$$

Multiplicirt man diese beiden Gleichungen mit einander, so kommt

$$e^{\frac{1}{2}z\left(y-\frac{1}{y}\right)} = \sum\sum (-1)^q \cdot \frac{z^{p+q}\, y^{p-q}}{2^{p|2}\, 2^{q|2}}\,.$$

Die Doppelsumme zur Rechten, welche sich über alle positiv ganzen Werthe von p und q von 0 bis ∞ erstreckt, zerlegen wir in drei Summen, deren erste von y frei ist, die zweite nur positive, die dritte nur negative Potenzen von y enthält, indem wir zuerst $p-q=0$, dann $p-q=r+1$, endlich $p-q=-(r+1)$ setzen. Dadurch wird

*) S. Schlömilch. Ueber die Bessel'sche Function. Zeitschrift für Math. u. Phys. II. Jahrgang. S. 137.

$$e^{\frac{1}{2}z\left(y-\frac{1}{y}\right)} = \sum(-1)^p \cdot \frac{z^{2p}}{(2^p|^p)^2} + \sum\sum(-1)^q \cdot \frac{z^{2q+r+1}y^{r+1}}{2^q|^2\,2^{q+r+1|2}}$$

$$+ \sum\sum(-1)^{p+r+1} \cdot \frac{z^{2p+r+1}y^{-(r+1)}}{2^p|^2\,2^{p+r+1|2}}.$$

Hierin ist der Coefficient von y^{r+1}:

$$\sum(-1)^q \cdot \frac{z^{2q+r+1}}{2^q|^2\,2^{q+r+1|2}} = J^{r+1}_{(z)}$$

(nach Gleichung VIII.a. §. 5.), ebenso derjenige von $y^{-(r+1)}$ gleich $(-1)^{r+1} J^{r+1}_{(z)}$, während das von y unabhängige Glied nichts anderes als $J^0_{(z)}$ ist. Wir haben demnach

$$(1.) \quad e^{\frac{1}{2}z\left(y-\frac{1}{y}\right)} = J^0 + \Sigma J^{r+1} \cdot y^{r+1} + \Sigma(-1)^{r+1} J^{r+1} y^{-(r+1)}$$

und noch, wenn $-y$ statt y gesetzt wird:

$$e^{-\frac{1}{2}z\left(y-\frac{1}{y}\right)} = J^0 + \Sigma(-1)^{r+1} J^{r+1} y^{r+1} + \Sigma J^{r+1} y^{-(r+1)}$$

Multiplicirt man diese beiden Gleichungen mit einander, so erhält man

$$\begin{aligned} 1 = (J^0)^2 &+ J^0 \Sigma J^{r+1} y^{r+1} + J^0 \Sigma(-1)^{r+1} J^{r+1} y^{r+1} \\ &+ J^0 \Sigma J^{r+1} y^{-(r+1)} + J^0 \Sigma(-1)^{r+1} J^{r+1} y^{-(r+1)} \\ &+ \Sigma\Sigma J^{q+1} J^{r+1} y^{q-r} + \Sigma\Sigma(-1)^{q+r} J^{q+1} J^{r+1} y^{q-r} \\ &+ \Sigma\Sigma(-1)^{q+1} J^{q+1} J^{r+1} y^{q+r+2} \\ &+ \Sigma\Sigma(-1)^{q+1} J^{q+1} J^{r+1} y^{-(q+r+2)}, \end{aligned}$$

oder, indem man in geeigneter Weise zusammenfasst:

$$\begin{aligned} 1 = (J^0)^2 &+ 2 J^0 \Sigma J^{2r+2} y^{2r+2} + 2 J^0 \Sigma J^{2r+2} y^{-(2r+2)} \\ &+ 2 \Sigma\Sigma J^{q+1} J^{r+1} y^{q-r} \\ &+ \Sigma\Sigma(-1)^{q+1} J^{q+1} J^{r+1} y^{q+r+2} \\ &+ \Sigma\Sigma(-1)^{q+1} J^{q+1} J^{r+1} y^{-(q+r+2)}, \end{aligned}$$

wo in der ersten Doppelsumme, nämlich in

$$2 \Sigma\Sigma J^{q+1} J^{r+1} y^{q-r}$$

die ganzzahligen Werthe von q und r so zu wählen sind, dass ihre Summe eine gerade Zahl gibt. Dann muss aber auch ihre Differenz $q-r$ positiv oder negativ gerade (oder Null) sein. Zerfällen wir dieselbe in 3 Summen, deren erste von y unabhängig ist, die zweite nur positive, die dritte nur negative Potenzen von y enthält, indem wir ähnlich wie oben zuerst $q - r = 0$, dann

$q - r = 2p + 2$, endlich $q - r = -(2p+2)$ setzen, so haben wir

$$2\Sigma\Sigma J^{q+1} J^{r+1} y^{q-r} = 2\Sigma(J^{q+1})^2$$
$$+ 2\Sigma\Sigma J^{r+1} J^{r+2p+3} y^{2p+2}$$
$$+ 2\Sigma\Sigma J^{q+1} J^{q+2p+3} y^{-(2p+2)}.$$

Was die beiden letzten obigen Doppelsummen anlangt, so können auch sie nur gerade Potenzen von y enthalten, indem die Summe

$$\Sigma(-1)^{q+1} J^{q+1} J^{r+1} \quad (q + r = 2p + 1)$$

für ein ungerades $q + r$ identisch Null ist. Setzen wir daher auch dort $q + r = 2p$, so haben wir schliesslich:

$$1 = (J^0)^2 + 2\Sigma(J^{q+1})^2 + 2J^0\Sigma J^{2p+2} y^{2p+2}$$
$$+ 2\Sigma\Sigma J^{r+1} J^{r+2p+3} y^{2p+2} + \Sigma\Sigma(-1)^{q+1} J^{q+1} J^{2p-q+1} y^{2p+2}$$
$$+ 2J^0\Sigma J^{2p+2} y^{-(2p+2)} + 2\Sigma\Sigma J^{q+1} J^{q+2p+3} y^{-(2p+2)}$$
$$+ \Sigma\Sigma(-1)^{q+1} J^{q+1} J^{2p-q+1} y^{-(2p+2)}.$$

Da diese Gleichung für jedes y gelten muss, so ist das absolute Glied zur Rechten nothwendig gleich 1. Man hat daher die bemerkenswerthe Gleichung*)

$$(2.) \quad (J^0)^2 + 2(J^1)^2 + 2(J^2)^2 + 2(J^3)^2 + \cdots = 1.$$

Ausserdem muss der Coefficient einer jeden Potenz von y verschwinden. Heben wir den Coefficienten von y^{2m+2} heraus, so lautet derselbe

$$2J^0 J^{2m+2} + 2\sum_{r=0}^{r=\infty} J^{r+1} J^{r+2m+3} + \sum_{q=0}^{q=2m}(-1)^{q+1} J^{q+1} J^{2m+1-q}.$$

Der ersten Summe, in welcher r alle ganzen Werthe von 0 bis ∞ annimmt, kann augenscheinlich das vorausgehende Glied als Anfangsglied einverleibt werden. In der zweiten Summe, deren Gliederzahl stets ungerade ist, sind je zwei gleichweit von der Mitte abstehende Glieder einander gleich. Sondert man daher ihr Mittelglied ab, so kann man sie in folgender Weise schreiben:

$$\sum_{q=0}^{q=2m}(-1)^{q+1} J^{q+1} J^{2m+1-q}$$
$$= (-1)^{m+1}(J^{m+1})^2 + 2\sum_{q=0}^{q=m-1}(-1)^{q+1} J^{q+1} J^{2m+1-q}.$$

*) Hansen. Ermittelung der absoluten Störungen in Ellipsen von beliebiger Excentricität und Neigung. 1. Theil. Schriften der Sternwarte Seeberg. S. 101.

Man gelangt demnach, wenn man den Coefficienten von y^{2m+2} gleich Null setzt, zu der Gleichung:

$$(3.)\quad 2\,\Sigma J^p J^{p+2m+2} = (-1)^m (J^{m+1})^2 + 2\sum_{q=0}^{q=m-1}(-1)^q J^{q+1} J^{2m+1-q}.$$

Daraus ergibt sich speciell

$$(3.\,a.)\begin{cases} 2\,\Sigma\,J^p\,J^{p+2} = (J^1)^2 \\ 2\,\Sigma\,J^p\,J^{p+4} = -(J^2)^2 + 2\,J^1\,J^3 \\ 2\,\Sigma\,J^p\,J^{p+6} = (J^3)^2 + 2\,J^1\,J^5 - 2\,J^2\,J^4 \\ 2\,\Sigma\,J^p\,J^{p+8} = -(J^4)^2 + 2\,J^1\,J^7 - 2\,J^2\,J^6 + 2\,J^3\,J^5 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \end{cases}$$

Der Coefficient von $y^{-(2m+2)}$ der Null gleichgesetzt, würde zur nämlichen Gleichung (3.) führen.

Nun werde in Gleichung (1.) $2z$ statt z gesetzt, so hat man

$$(4.)\quad e^{z\left(y-\frac{1}{y}\right)} = J^0_{(2z)} + \Sigma J^{r+1}_{(2z)}.y^{r+1} + \Sigma(-1)^{r+1} J^{r+1}_{(2z)}.y^{-(r+1)}$$

und wenn man dieselbe Reihe ins Quadrat erhebt:

$$\begin{aligned} e^{z\left(y-\frac{1}{y}\right)} &= (J^0_{(z)})^2 + 2J^0_{(z)}\Sigma J^{p+1}_{(z)}.y^{p+1} + 2J^0_{(z)}\Sigma(-1)^{p+1}J^{p+1}.y^{-(p+1)} \\ &+ \Sigma\Sigma J^{p+1}_{(z)}J^{q+1}_{(z)}y^{p+q+2} + \Sigma\Sigma(-1)^{p+q+2}J^{p+1}_{(z)}J^{q+1}_{(z)}.y^{-(p+q+2)} \\ &+ 2\Sigma\Sigma(-1)^{q+1}J^{p+1}_{(z)}.J^{q+1}_{(z)}y^{p-q}. \end{aligned}$$

Was die letztere Doppelreihe anlangt, so zerfällen wir dieselbe in drei Summen, deren erstere von y unabhängig ist, während die zweite nur positive, die dritte nur negative Potenzen von y enthält, indem wir zuerst $p - q = 0$, dann $p - q = r + 1$ und endlich $p - q = -(r + 1)$ setzen. Dadurch nimmt vorstehende Gleichung die folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned} (5.)\quad e^{z\left(y-\frac{1}{y}\right)} &= (J^0_{(z)})^2 + 2\Sigma(-1)^{p+1}(J^{p+1}_{(z)})^2 + 2J^0_{(z)}\Sigma J^{p+1}_{(z)}.y^{p+1} \\ &+ \Sigma\Sigma J^{p+1}_{(z)}J^{q+1}_{(z)}.y^{p+q+2} + 2\Sigma\Sigma(-1)^{q+1}J^{q+r+2}_{(z)}J^{q+1}_{(z)}.y^{r+1} \\ &+ 2J^0_{(z)}\Sigma(-1)^{p+1}J^{p+1}_{(z)}y^{-(p+1)} + \Sigma\Sigma(-1)^{p+q+2}J^{p+1}_{(z)}J^{q+1}_{(z)}.y^{-(p+q+2)} \\ &+ 2\Sigma\Sigma(-1)^{p+r+2}J^{p+1}_{(z)}J^{p+r+2}_{(z)}y^{-(r+1)}. \end{aligned}$$

Vergleicht man hier die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von y mit denjenigen der gleichhohen Potenzen von y in Formel (4.), so erhält man zunächst folgende zwei Gleichungen: *)

---

*) Hansen. l. c.

$$(6.)\quad J^0_{(2z)} = (J^0_{(z)})^2 - 2(J^1_{(z)})^2 + 2(J^2_{(z)})^2 - 2(J^3_{(z)})^2 + \cdots$$

$$(7.)\quad J^1_{(2z)} = 2J^0_{(z)}J^1_{(z)} - 2J^1_{(z)}J^2_{(z)} + 2J^2_{(z)}J^3_{(z)} - 2J^3_{(z)}J^4_{(z)} + \cdots,$$

welche übrigens aus §. 10. bereits bekannt sind.

Die erstere kann durch Combination mit der Gleichung

$$1 = (J^0_{(z)})^2 + 2(J^1_{(z)})^2 + 2(J^2_{(z)})^2 + 2(J^3_{(z)})^2 + \cdots$$

nach Belieben in die eine oder die andere der beiden folgenden Formen gebracht werden:

$$(6.\text{a.})\quad J^0_{(2z)} = -1 + 2(J^0_{(z)})^2 + 4(J^2_{(z)})^2 + 4(J^4_{(z)})^2 + \cdots$$

$$(6.\text{b.})\quad J^0_{(2z)} = 1 - 4(J^1_{(z)})^2 - 4(J^3_{(z)})^2 - 4(J^5_{(z)})^2 + \cdots.$$

Vergleicht man überhaupt in den Gleichungen (4. und 5.) die Coefficienten von y^{r+2}, so erhält man allgemein

$$(8.)\quad J^{r+2}_{(2z)} = \sum_{p=0}^{p=r} J^{p+1}_{(z)}\, J^{r-p+1}_{(z)} + 2\sum(-1)^p \,.\, J^p_{(z)} \,.\, J^{p+r+2}_{(z)},$$

wo die erstere Summe eine blos endliche, die zweite aber eine endlose ist. Speciell würde daraus hervorgehen:

$$(8.\text{a.})\quad \begin{cases} J^2_{(2z)} = (J^1_{(z)})^2 + 2J^0_{(z)}J^2_{(z)} + 2J^1_{(z)}J^3_{(z)} + 2J^2_{(z)}J^4_{(z)} - \cdots \\ J^3_{(2z)} = 2J^1_{(z)}J^2_{(z)} + 2J^0_{(z)}J^3_{(z)} - 2J^1_{(z)}J^4_{(z)} + 2J^2_{(z)}J^5_{(z)} - \cdots \\ J^4_{(2z)} = (J^2_{(z)})^2 + 2J^1_{(z)}J^3_{(z)} + 2J^0_{(z)}J^4_{(z)} - 2J^1_{(z)}J^5_{(z)} \\ \qquad\qquad + 2J^2_{(z)}J^6_{(z)} - \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Indem man in Gleichung (1.) mz statt z setzen, und sie dann auch noch mit m potenziren würde, könnte man auf dieselbe Weise Multiplikationsformeln für $J^r_{(mz)}$ gewinnen. Dieselben sind aber so zusammengesetzt, dass wir ihre Entwickelung lieber unterlassen.

§. 13. Reihen, welche nach Bessel'schen Functionen fortschreiten.

Wir multipliciren die Gleichung (II. a. §. 1.) mit irgend einer Function $f(\nu)$ von ν, so dass sie die Gestalt

$$\frac{2}{z} \cdot \nu f(\nu) \,.\, J^\nu = f(\nu)\, J^{\nu-1} + f(\nu)\, J^{\nu+1} \text{ annimmt},$$

setzen sodann statt ν nach und nach $\nu+2$, $\nu+4$, $\nu+6$, ..., $\nu+2p$, ..., und addiren sämmtliche so erhaltenen Gleichungen bis in's Unendliche. Das Resultat dieser Operation ist die Gleichung

$$\frac{2}{z} \sum (\nu+2p)\, f(\nu+2p)\, J^{\nu+2p}$$

$$= f(\nu)\, J^{\nu-1} + \Sigma\big(f(\nu+2p) + f(\nu+2p+2)\big)\, J^{\nu+2p+1} .$$

Setzt man nun

$$(\alpha.) \qquad f(\nu) = (\nu+1)^{n|2} (\nu-1)^{n|-2} ,$$

so ist

$$\begin{aligned} f(\nu+2p) + f(\nu+2p+2) &= (\nu+2p+1)^{n|2} (\nu+2p-1)^{n|-2} \\ &+ (\nu+2p+3)^{n|2} (\nu+2p+1)^{n|-2} \\ &= (\nu+2p+1)^{n|2} (\nu+2p-1)^{n-1|-2} (\nu+2p+1-2n) \\ &+ (\nu+2p+1)^{n|2} (\nu+2p+1+2n) (\nu+2p-1)^{n-1|-2} \\ &= (\nu+2p+1)^{n|2} (\nu+2p-1)^{n-1|-2} (2\nu+4p+2) \\ &= 2\,(\nu+2p+1)^{n|2} (\nu+2p+1)^{n|-2} . \end{aligned}$$

Setzen wir zweitens

$$(\beta.) \qquad f(\nu) = \nu^{n+1|2} (\nu-2)^{n|-2} ,$$

so finden wir ebenso

$$\begin{aligned} f(\nu+2p) + f(\nu+2p+2) &= (\nu+2p)^{n+1|2} (\nu+2p-2)^{n|-2} \\ &+ (\nu+2p+2)^{n+1|2} (\nu+2p)^{n|-2} \\ &= (\nu+2p+2)^{n|2} (\nu+2p)^{n|-2} (\nu+2p-2n) \\ &+ (\nu+2p+2)^{n|2} (\nu+2p+2+2n) (\nu+2p)^{n|-2} \\ &= (\nu+2p+2)^{n|2} (\nu+2p)^{n|-2} (2\nu+4p+2) \\ &= 2\,(\nu+2p+1)\, (\nu+2p+2)^{n|2} (\nu+2p)^{n|-2} . \end{aligned}$$

Substituirt man jetzt diese Werthe in (1.) so gelangt man zu folgenden zwei Gleichungen

$$(1.) \qquad \frac{2}{z} \sum (\nu+2p)\, (\nu+2p+1)^{n|2} (\nu+2p-1)^{n|-2} J^{\nu+2p}$$

$$= (\nu+1)^{n|2} (\nu-1)^{n|-2} J^{\nu-1} + 2\, \Sigma\, (\nu+2p+1)^{n|2} (\nu+2p+1)^{n|-2} J^{\nu+2p+1} ,$$

und

$$(2.) \qquad \frac{2}{z} \sum (\nu+2p)^{n+1|2} (\nu+2p)^{n+1|-2} J^{\nu+2p}$$

$$= \nu^{n+1|2} (\nu-2)^{n|-2} J^{\nu-1} + 2\, \Sigma\, (\nu+2p+1)(\nu+2p+2)^{n|2} (\nu+2p)^{n|-2} . J^{\nu+2p+1} .$$

Sondern wir nun von der Summe zur Linken in Gleichung (1.) das erste Glied ab, indem wir zuerst $p = 0$, dann $p+1$ statt p setzen, schreiben wir ferner in Gleichung (2.) $\nu+1$ statt ν, so lauten dieselben, sofern man noch zur Abkürzung

$$\Sigma\, (\nu+2p+1)^{n|2} (\nu+2p+1)^{n|-2} J^{\nu+2p+1} = A^n_{(\nu)}$$

$$\Sigma\, (\nu+2p+2)(\nu+2p+3)^{n|2} (\nu+2p+1)^{n|-2} J^{\nu+2p+2} = B^n_{(\nu)}$$

setzt, wie folgt, und zwar die erstere

$$\frac{2\nu}{z}(\nu+1)^{n|2}(\nu-1)^{n|-2} J^\nu + \frac{2}{z} B^n_{(\nu)} = (\nu+1)^{n|2}(\nu-1)^{n|-2} J^{\nu-1} + 2 A^n_{(\nu)}$$

oder besser, wenn zur Linken $\frac{2\nu}{z} J^{\nu-1}$ durch die Summe $J^{\nu-1} + J^{\nu+1}$ ersezt wird:

$$(1.\text{a.})\qquad (\nu+1)^{n|2} (\nu-1)^{n|-2} J^{\nu+1} + \frac{2}{z} B^n_{(\nu)} = 2 A^n_{(\nu)}\,.$$

Ebenso die letztere

$$(2.\text{a.})\qquad \frac{2}{z} A^{n+1}_{(\nu)} = (\nu+1)^{n+1|2} (\nu-1)^{n|-2} J^\nu + 2 B^n_{(\nu)}\,.$$

Addirt man beide Gleichungen, nachdem die erstere mit z multiplicirt worden, so findet man

$$\frac{2}{z} \cdot A^{n+1}_{(\nu)} + z(\nu+1)^{n|2} (\nu-1)^{n|-2} J^{\nu+1}$$
$$= 2z A^n_{(\nu)} + (\nu+1)^{n+1|2} (\nu-1)^{n|-2} J^\nu,$$

oder auch

$$\frac{2}{z^2} \cdot A^{n+1}_{(\nu)} - 2 A^n_{(\nu)}$$
$$= (\nu+1)^{n+1|2} (\nu-1)^{n|-2} \cdot \frac{J^\nu}{z} - (\nu+1)^{n|2} (\nu-1)^{n|-2} J^{\nu+1}\,.$$

Setzt man darin nach und nach $n+1$, $n+2$, ..., $n+m-1$ statt n, dividirt die so entstandenen Gleichungen der Reihe nach durch z^2, z^4, ..., $z^{2(m-1)}$ und addirt sie zur vorstehenden, so erhält man

$$\frac{2}{z^{2m}} A^{n+m}_{(\nu)} - 2 A^n_{(\nu)}$$
$$= J^\nu \sum_{p=0}^{p=m-1} \frac{(\nu+1)^{n+p+1|2} (\nu-1)^{n+p|-2}}{z^{2p+1}} - J^{\nu+1} \sum_{p=0}^{p=m-1} \frac{(\nu+1)^{n+p|2} (\nu-1)^{n+p|-2}}{z^{2p}}\,,$$

oder, wenn man darin $n = 0$ annimmt, und beiderseits mit z^{2m} multiplicirt:

$$(3.)\qquad 2 A^m_{(\nu)} = 2 z^{2m} A^0_{(\nu)} + J^\nu \sum_{p=0}^{p=m-1} (\nu+1)^{p+1|2} (\nu-1)^{p|-2} z^{2m-2p-1}$$
$$- J^{\nu+1} \sum_{p=0}^{p=m-1} (\nu+1)^{p|2} (\nu-1)^{p|-2} z^{2m-2p}$$

und noch, vermöge (2. a.)

$$(4.)\quad 2\,B^m_{(\nu)} = 2\,z^{2m+1}\,A^0_{(\nu)} + J^\nu \sum_{p=0}^{p=m-1} (\nu+1)^{p+1|2}\,(\nu-1)^{p|-2}\,z^{2m-2p}$$
$$- J^{\nu+1} \sum_{p=0}^{p=m} (\nu+1)^{p|2} (\nu-1)^{p|-2}\,z^{2m-2p+1}\,.$$

Diese beiden Gleichungen erlauben, die nach Bessel'schen Functionen fortschreitenden Reihen $A^m_{(\nu)}$ und $B^m_{(\nu)}$ durch J^ν und $J^{\nu+1}$ und die einfachste derartige Reihe

$$A^0_{(\nu)} = \Sigma\,J^{\nu+2p+1} = J^{\nu+1} + J^{\nu+3} + J^{\nu+5} + J^{\nu+7} + \cdots$$

auszudrücken.

Setzt man in beiden Gleichungen $\nu = -1$, so verschwindet in jeder derselben die erste Summe zur Rechten völlig, während die zweite sich auf ihr erstes Glied reducirt, so dass man hat

$$2\,A^m_{(-1)} = z^{2m}\,(2\,A^0_{(-1)} - J^0)\,,$$
$$2\,B^m_{(-1)} = z^{2m+1}\,(2\,A^0_{(-1)} - J^0)\,.$$

Hier ist

$$2\,A^0_{(-1)} - J^0 = 2\,\Sigma\,J^{2p} - J^0$$
$$= J^0 + 2\,J^2 + 2\,J^4 + 2\,J^6 + \cdots.$$

Aus der Gleichung (5.) des §. 11. ergibt sich aber für $\omega = 0$:

$$J^0 + 2\,J^2 + 2\,J^4 + 2\,J^6 + \cdots = 1\,.$$

Wir haben demnach

$$2\,A^m_{(-1)} = z^{2m}$$
$$2\,B^m_{(-1)} = z^{2m+1}\,,$$

oder:

$$(5.)\qquad 2\,\Sigma\,(2p)^{m|2}\,(2p)^{m|-2}\,J^{2p} = z^{2m}\,,$$

$$(6.)\qquad 2\,\Sigma\,(2p+1)\,(2p+2)^{m|2}\,(2p)^{m|-2}\,J^{2p+1} = z^{2m+1}\,.$$

In der ersten dieser Gleichungen darf man nur dann $m = 0$ setzen, wenn man nicht vergisst von dem ersten Gliede der Reihe nur die Hälfte zu nehmen, die andere aber lässt für m ohne Weiteres jeden Werth von 0 bis ∞ zu.

Specialisiren wir diese beiden Formeln, so erhalten wir folgende Gruppe von Gleichungen, wodurch sämmtliche positiv ganzen Potenzen von z nach Bessel'schen Functionen entwickelt sind:

$$(5.a.)\quad \begin{cases} J^0 + 2\,J^2 + 2\,J^4 + 2\,J^6 + \cdots & = 1 \\ 2\,(2^2\,J^2 + 4^2\,J^4 + 6^2\,J^6 + \cdots) & = z^2 \\ 2\,(4.6.4.2\,J^4 + 6.8.6.4\,J^6 + 8.10.8.6\,J^8 + \cdots) & = z^4 \\ 2\,(6.8.10.6.4.2\,J^6 + 8.10.12.8.6.4\,J^8 + \cdots) & = z^6 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \end{cases}$$

$$(6.a.)\quad \begin{cases} 2\,(J^1 + 3\,J^3 + 5\,J^5 + 7\,J^7 + \cdots) & = z \\ 2\,(3.4.2\,J^3 + 5.6.4\,J^5 + 7.8.6\,J^7 + \cdots) & = z^3 \\ 2\,(5.6.8.4.2\,J^5 + 7.8.10.6.4\,J^7 + \cdots) & = z^5 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \end{cases}$$

Auf die erste Gleichung der Gruppe (6.a.) würde man auch kommen, wenn man die Gleichung (6.) des §. 11. nach ω differentiirte und dann $\omega = 0$ setzte.

Wenn man die aus

$$\frac{2\nu}{z}\, f(\nu)\,.\, J^{\nu} = f(\nu)\, J^{\nu-1} + f(\nu)\,.\, J^{\nu+1}$$

durch successive Substitution von $\nu + 2,\ \nu + 4,\ \ldots,\ \nu + 2p$ statt ν hervorgehenden Gleichungen abwechselnd mit entgegengesetzten Vorzeichen versieht und dann addirt, so erhält man zunächst

$$\frac{2}{z} \sum (-1)^p\,.\,(\nu+2p)\, f(\nu+2p)\, J^{\nu+2p} = f(\nu)\,.\, J^{\nu-1}$$
$$- \Sigma\,(-1)^p\,\big(f(\nu+2p+2) - f(\nu+2p)\big)\, J^{\nu+2p+1}\,.$$

Setzt man wieder zuerst

$$f(\nu) = (\nu+1)^{n|2}\,(\nu-1)^{n|-2}\,,$$

sodann

$$f(\nu) = \nu^{n+1|2}\,(\nu-2)^{n|-2}\,,$$

so ist im ersten Falle

$$f(\nu+2p+2) - f(\nu+2p) = 4n\,(\nu+2p+1)^{n|2}\,(\nu+2p-1)^{n-1|-2}\,,$$

im zweiten aber

$$f(\nu+2p+2) - f(\nu+2p) = 2\,(2n+1)\,(\nu+2p+2)^{n|2}(\nu+2p)^{n|-2}\,.$$

Man hat demnach, wenn man diese Werthe oben einsetzt, folgende zwei Gleichungen

$$(7.)\qquad \frac{2}{z} \sum (-1)^p\,(\nu+2p)\,(\nu+2p+1)^{n|2}\,(\nu+2p-1)^{n|-2}\, J^{\nu+2p}$$
$$= (\nu+1)^{n|2}(\nu-1)^{n|-2} J^{\nu-1} - 2\,.\,2n\,\Sigma(-1)^p(\nu+2p+1)^{n|2}(\nu+2p-1)^{n-1|-2} J^{\nu+2p+1}\,,$$

$$(8.)\qquad \frac{2}{z} \sum (-1)^p\,.\,(\nu+2p)^{n+1|2}\,(\nu+2p)^{n+1|-2}\, J^{\nu+2p}$$
$$= \nu^{n+\;|2}(\nu-2)^{n|-2} J^{\nu-1} - 2\,(2n+1)\,\Sigma(-1)^p\,(\nu+2p+2)^{n|2}\,(\nu+2p)^{n|-2} J^{\nu+2p+1}\,.$$

Obschon diese Gleichungen einer Behandlung, wie sie oben an den Gleichungen (1.) und (2.) geübt wurde, nicht fähig sind, liefern sie dennoch eine Reihe interessanter Relationen. Setzt man z. B. in (7.) $n = 0$, so hat man

$$(9.)\qquad 2\,\Sigma(-1)^p\,(\nu+2p)\,J^{\nu+2p} = z\,J^{\nu-1}$$

und daraus speciell

$$(9.\text{a.})\qquad \begin{cases} 2\,(J^1 - 3\,J^3 + 5\,J^5 - 7\,J^7 + \cdots) = z\,J^0 \\ 2\,(2\,J^2 - 4\,J^4 + 6\,J^6 - 8\,J^8 + \cdots) = z\,J^1 \\ 2\,(3\,J^3 - 5\,J^5 + 7\,J^7 - 9\,J^9 + \cdots) = z\,J^2 \\ 2\,(4\,J^4 - 6\,J^6 + 8\,J^8 - 10\,J^{10} + \cdots) = z\,J^3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Diese Gleichungen, durch welche jede Bessel'sche Function selbst wieder nach Bessel'schen Functionen entwickelt ist, hätte man natürlich, da ja für $n = 0$ das erste $f(\nu) = 1$ ist, auch erhalten, wenn man die aus der Gleichung (II.) durch Einsetzen von $\nu + 2$, $\nu + 4, \ldots, \nu + 2p, \ldots$ hervorgehenden Gleichungen mit abwechselnden Vorzeichen addirt hätte.

Setzt man ferner in (7.) $n = 1$, so wird

$$\frac{2}{z}\sum(-1)^p\,(\nu+2p-1)\,(\nu+2p)\,(\nu+2p+1)\,J^{\nu+2p}$$
$$= (\nu+1)\,(\nu-1)\,J^{\nu-1} - 2\,.\,2\,\Sigma(-1)^p\,(\nu+2p+1)\,J^{\nu+2p+1}\,.$$

Nach (9.) ist aber

$$2\,\Sigma(-1)^p\,(\nu+2p+1)\,J^{\nu+2p+1} = z\,J^\nu\,,$$

folglich hat man

$$(10.)\qquad 2\,\Sigma(-1)^p\,.\,(\nu+2p-1)\,(\nu+2p)\,(\nu+2p+1)\,J^{\nu+2p}$$
$$= z\,.\,(\nu+1)\,(\nu-1)\,J^{\nu-1} - 2\,z^2\,J^\nu\,,$$

also z. B. für $\nu = 1$ u. 2:

$$(10.\text{a.})\begin{cases} 2\,(2.3.4\,J^3 - 4.5.6\,J^5 + 6.7.8\,J^7 - 8.9.10\,J^9 + \cdots) = -2\,z^2\,J^1 \\ 2\,(1.2.3\,J^2 - 3.4.5\,J^4 + 5.6.7\,J^6 - 7.8.9\,J^8 + \cdots) = 3z\,J^1 - 2z^2\,J^2. \end{cases}$$

Aus (8.) folgt für $n = 0$:

$$\frac{2}{z}\sum(-1)^p\,(\nu+2p)^2\,J^{\nu+2p} = \nu\,J^{\nu-1} - 2\sum(-1)^p\,J^{\nu+2p+1}\,.$$

Für $\nu = 1$ ist nun die rechte Seite

$$J^0 - 2\,(J^2 - J^4 + J^6 - J^8 + \cdots)$$

und für $\nu = 2$:

$$2\,J^1 - 2\,(J^3 - J^5 + J^7 - + \cdots)\,.$$

Setzt man aber in den Gleichungen (3.) und (4.) des §. 11. $\psi = 0$, so kommt:

$$(11.) \quad \begin{cases} J^0 - 2\,J^2 + 2\,J^4 - 2\,J^6 + \cdots = \cos z \\ 2\,(J^1 - J^3 + J^5 - J^7 + \cdots) \qquad = \sin z\,. \end{cases}$$

Demnach hat man auch

$$\frac{2}{z} \sum (-1)^p\,(2p+1)^2\,J^{2p+1} = \cos\, z$$

und

$$\frac{2}{z} \sum (-1)^p\,(2p+2)^2\,J^{2p+2} = \sin\, z\,,$$

oder

$$(12.) \quad \begin{cases} 2\,(J^1 - 3^2\,J^3 + 5^2\,J^5 - 7^2\,J^7 + \cdots) = z \cos z \\ 2\,(2^2 J^2 - 4^2\,J^4 + 6^2\,J^6 - 8^2\,J^8 + \cdots) = z \sin z\,. \end{cases}$$

Endlich sei noch bemerkt, dass, wenn man zur Gleichung

$$J^0 + 2\,J^2 + 2\,J^4 + 2\,J^6 + \cdots = 1$$

die erste Gleichung der Gruppe (11.), nämlich

$$J^0 - 2\,J^2 + 2\,J^4 - 2\,J^6 + \cdots = \cos z$$

addirt, oder davon subtrahirt, noch folgende zwei Gleichungen hervorgehen:

$$(13.) \quad \begin{cases} J^0 + 2\,J^4 + 2\,J^8 + 2\,J^{12} + \cdots = \cos^2 \tfrac{1}{2}\, z \\ 2\,J^2 + 2\,J^6 + 2\,J^{10} + 2\,J^{14} + \cdots = \sin^2 \tfrac{1}{2}\, z\,. \end{cases}$$

§. 14. Fortsetzung.

Wir gehen jetzt von der Gleichung (5. §. 3.) aus, und multipliciren dieselbe mit $f(\mu)$; dieselbe lautet alsdann

$$2\,f(\mu) \cdot \frac{\partial J^\nu}{\partial z} = f(\mu)\,J^{\nu-1} - f(\mu)\,J^{\nu+1}\,,$$

Hierin setzen wir nach und nach $\mu + 2\,,\, \mu + 4\,, \ldots,\, \mu + 2p$ statt μ und gleichzeitig resp. $\nu + 2\,,\, \nu + 4\,, \ldots,\, \nu + 2p$ statt ν. Durch Addition sämmtlicher einzelner Gleichungen erhalten wir

$$2\,\frac{\partial}{\partial z} \sum f(\mu + 2p)\,J^{\nu+2p} = f(\mu)\,J^{\nu-1} + \Sigma\big(f(\mu+2p+2) - f(\mu+2p)\big)\,J^{\nu+2p+1}.$$

Nehmen wir nun wieder zuerst

$$f(\mu) = (\mu + 1)^{n|2}\,(\mu - 1)^{n|-2}\,,$$

ferner

$$f(\mu) = (\mu + 1)^{n+1|2}\,(\mu - 1)^{n|-2}\,,$$

so dass einmal

$$f(\mu + 2p + 2) - f(\mu + 2p) = 4n(\mu + 2p + 1)^{n|2}\,(\mu + 2p - 1)^{n-1|-2}$$

und dann noch

$$f(\mu+2p+2)-f(\mu+2p)=2(2n+1)(\mu+2p+3)^{n|2}(\mu+2p+1)^{n|-2}$$

wird, so gelangen wir zu folgenden zwei Gleichungen:

$$(1.)\qquad 2\frac{\partial}{\partial z}\sum(\mu+2p+1)^{n|2}(\mu+2p-1)^{n|-2}J^{\nu+2p}$$
$$=(\mu+1)^{n|2}(\mu-1)^{n|-2}J^{\nu-1}+2.2n\,\Sigma\,(\mu+2p+1)^{n|2}(\mu+2p-1)^{n-1|-2}J^{\nu+2p+1}$$

und

$$(2.)\qquad 2\frac{\partial}{\partial z}\sum(\mu+2p+1)^{n+1|2}(\mu+2p-1)^{n|-2}J^{\nu+2p}$$
$$=(\mu+1)^{n+1|2}(\mu-1)^{n|-2}J^{\nu-1}+2(2n+1)\,\Sigma\,(\mu+2p+3)^{n|2}(\mu+2p+1)^{n|-2}J^{\nu+2p+1}\,.$$

Von der Summe zur Linken in der ersten Gleichung trennen wir das erste Glied dadurch ab, dass wir zuerst $p=0$, dann $p+1$ statt p setzen; in der zweiten Gleichung dagegen schreiben wir $\nu+1$ statt ν, wodurch die beiden Gleichungen folgende Gestalt annehmen:

$$2(\mu+1)^{n|2}(\mu-1)^{n|-2}\frac{\partial J^{\nu}}{\partial z}+2\frac{\partial}{\partial z}\sum(\mu+2p+3)^{n|2}(\mu+2p+1)^{n|-2}J^{\nu+2p+2}$$
$$=(\mu+1)^{n|2}(\mu-1)^{n|-2}J^{\nu-1}+2.2n\,\Sigma(\mu+2p+1)^{n|2}(\mu+2p-1)^{n-1|-2}J^{\nu+2p+1}$$

$$2\frac{\partial}{\partial z}\sum(\mu+2p+1)^{n+1|2}(\mu+2p-1)^{n|-2}J^{\nu+2p+1}=(\mu+1)^{n+1|2}(\mu-1)^{n|-2}J^{\nu}$$
$$+\,2.(2n+1)\,\Sigma\,(\mu+2p+3)^{n|2}(\mu+2p+1)^{n|-2}J^{\nu+2p+2}\,.$$

Setzt man nun zur Abkürzung

$$\Sigma\,(\mu+2p+1)^{n|2}(\mu+2p-1)^{n-1|-2}J^{\nu+2p+1}=C^{n}_{(\mu)}\,,$$
$$\Sigma\,(\mu+2p+3)^{n|2}(\mu+2p+1)^{n|-2}J^{\nu+2p+2}=D^{n}_{(\mu)}\,,$$

so lauten vorstehende Gleichungen folgendermassen:

$$(3.)\quad\begin{cases}2(\mu+1)^{n|2}(\mu-1)^{n|-2}\dfrac{\partial J^{\nu}}{\partial z}+2\dfrac{\partial D^{n}_{(\mu)}}{\partial z}=(\mu+1)^{n|2}(\mu-1)^{n|-2}J^{\nu-1}+2.2n\,C^{n}_{(\mu)}\\[2ex] 2\dfrac{\partial C^{n+1}_{(\mu)}}{\partial z}=(\mu+1)^{n+1|2}(\mu-1)^{n|-2}J^{\nu}+2(2n+1)D^{n}_{(\mu)}\,.\end{cases}$$

Wird die erstere mit $2n+1$ multiplicirt, die zweite nach z differentiirt, und werden beide sodann addirt, so ergibt sich:

$$2\frac{\partial^2 C^{n+1}_{(\mu)}}{\partial z^2}=(\mu+1)^{n|2}(\mu-1)^{n+1|-2}\frac{\partial J^{\nu}}{\partial z}+(2n+1)(\mu+1)^{n|2}(\mu-1)^{n|-2}J^{\nu-1}$$
$$+\,2.2n(2n+1)\,C^{n}_{(\mu)}\,,$$

oder nach einer leicht ersichtlichen Umformung

$$(4.)\qquad 2\frac{\partial^2 C^{n+1}_{(\mu)}}{\partial z^2}=\tfrac{1}{2}(\mu+1)^{n+1|2}(\mu-1)^{n|-2}J^{\nu-1}$$
$$-\,\tfrac{1}{2}(\mu+1)^{n|2}(\mu-1)^{n+1|-2}J^{\nu+1}+2.2n(2n+1)\,C^{n}_{(\mu)}\,.$$

Daraus folgt zunächst für $n = 0$

(5.) $$2 \cdot \frac{\partial^2 C^1_{(\mu)}}{\partial z^2} = \tfrac{1}{2} (\mu + 1) J^{\nu-1} - \tfrac{1}{2} (\mu - 1) J^{\nu+1}$$

oder

(5.) $$2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \sum (\mu + 2p + 1) J^{\nu+2p+1} = \tfrac{1}{2} (\mu + 1) J^{\nu-1} - \tfrac{1}{2} (\mu - 1) J^{\nu+1}.$$

Setzt man darin nach einander $\mu = 1$, $\mu = -1$, so hat man

(5. a.) $$2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \sum (2p + 2) J^{\nu+2p+1} = J^{\nu-1},$$

(5. b.) $$2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \sum 2p \,.\, J^{\nu+2p+1} = J^{\nu+1},$$

woraus noch specieller folgen würde:

$$2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \sum (2p + 2) J^{2p+2} = J^0,$$

$$2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \sum (2p + 2) J^{2p+3} = J^1.$$

Da nun nach Formel (3. §. 6.)

$$\int_0^z J^1 dz = 1 - J^0,$$

so hat man

(5. c.) $$\begin{cases} 2\,(2\,J^2 + 4\,J^4 + 6\,J^6 + 8\,J^8 + \cdots) = \int\int J^0 dz^2, \\ 2\,(2\,J^3 + 4\,J^5 + 6\,J^7 + 8\,J^9 + \cdots) = z - \int J^0 dz, \end{cases}$$

wo die Integrale von 0 bis z genommen sind.

Sei ferner in (4.) n nicht Null, dagegen $\mu = 1$ so haben wir

(6.) $$\frac{\partial^2 C^{n+1}_{(1)}}{\partial z^2} = 2n\,(2\,n + 1)\, C^n_{(1)}.$$

Differentiiren wir diese Gleichung nach und nach 2, 4, 6, ..., $2m$mal nach z, und setzen gleichzeitig resp. $n + 1$, $n + 2$, $n + 3$, ..., $n + m$ statt n, so erhalten wir folgende Gruppe

$$\frac{\partial^2 C^{n+1}_{(1)}}{\partial z^2} = 2\,n\,(2\,n + 1)\, C^n_{(1)}$$

$$\frac{\partial^4 C^{n+2}_{(1)}}{\partial z^4} = (2n + 2)\,(2n + 3)\, \frac{\partial^2 C^{n+1}_{(1)}}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial^6 C^{n+3}_{(1)}}{\partial z^6} = (2n + 4)\,(2n + 5)\, \frac{\partial^4 C^{n+2}_{(1)}}{\partial z^4}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\frac{\partial^{2m+2} C^{n+m+1}_{(1)}}{\partial z^{2m+2}} = (2n + 2m)(2n + 2m + 1)\, \frac{\partial^{2m} C^{n+m}_{(1)}}{\partial z^{2m}}.$$

Addirt man diese Gleichungen, nachdem man die erste mit $(2n+2)(2n+3)$, die zweite mit $(2n+4)(2n+5)$, die dritte mit $(2n+6)(2n+7)$, ..., endlich die vorletzte mit $(2n+2m)(2n+2m+1)$ multiplicirt hat, so findet man

$$(7).\quad \frac{\partial^{2m+2} C_{(1)}^{n+m+1}}{\partial z^{2m+2}} = 2n(2n+1)(2n+2)(2n+3)\, C_{(1)}^{n},$$

wo n nicht Null sein darf. Für $n = 1$ wird sie

$$(7.a.)\quad \frac{\partial^{2m+2} C_{(1)}^{m+2}}{\partial z^{2m+2}} = 2.3.4.5\, C_{(1)}^{1}.$$

Ebenso würde man für ein positiv ganzes n und $\mu = -1$ aus (4.) die Gleichungen

$$\frac{\partial^2 C_{(-1)}^{n+1}}{\partial z^2} = 2n(2n+1)\, C_{(-1)}^{n}$$

und

$$\frac{\partial^{2m+2} C_{(-1)}^{n+m+1}}{\partial z^{2m+2}} = 2n(2n+1)(2n+2)(2n+3)\, C_{(-1)}^{n}$$

finden, welche sich jedoch von den Gleichungen (6.) und (7.) nicht wesentlich unterscheiden.

Nun folgt aber aus Gleichung (5.), dass

$$2\frac{\partial^2 C_{(1)}^{1}}{\partial z^2} = J^{\nu-1}$$

oder

$$2\, C_{(1)}^{1} = \int_0^z\!\!\int_0^z J^{\nu-1}\, dz^2.$$

Dadurch wird aber aus Gleichung (7.a.) die folgende

$$\frac{\partial^{2m+2} C_{(1)}^{m+2}}{\partial z^{2m+2}} = 3.4.5 \iint J^{\nu-1}\, dz^2$$

oder

$$C_{(1)}^{m+2} = 3.4.5 \int^{2m+4} J^{\nu-1}\, dz^{2m+4}.$$

Durch diese Gleichung, welche in vollständiger Schreibweise, und wenn $\nu+1$ statt ν gesetzt wird, so lautet

$$(8.)\quad \Sigma\,(2p+4)^{m+2|2}\,(2p+2)^{m+1|-2}\, J^{\nu+2p+2} = 3.4.5 \int^{2m+4} J^{\nu}\, dz^{2m+4},$$

und die bereits bekannte

$$(5.a.)\quad 2\,\Sigma\,(2p+2)\, J^{\nu+2p+2} = \iint J^{\nu}\, dz^2$$

sind alle vielfachen Integrale gerader Ordnung sämmtlicher Bessel'scher Functionen in nach Bessel'schen Functionen fortschreitende Reihen entwickelt.

Setzt man in der zweiten Gleichung (3.) $n = 0$ und $\mu = -1$, so ergibt sich

$$2\, D^0_{(-1)} = 2\, \frac{\partial C^1_{(-1)}}{\partial z},$$

oder, weil nach (5.)

$$2\, \frac{\partial C^1_{(-1)}}{\partial z} = \int J^{\nu+1}\, dz$$

ist:

$$2\, D^0_{(-1)} = \int J^{\nu+1}\, dz\,.$$

Schreibt man statt D die entsprechende Reihe und setzt gleichzeitig $\nu - 1$ statt ν, so hat man

$$(9.\,\mathrm{a.})\qquad 2\, \Sigma\, J^{\nu+2p+1} = \int J^{\nu}\, dz\,.$$

Substituirt man ferner in die 2[te] Gleichung der Gruppe (3.) $m+1$ für n und 1 für μ, so folgt

$$(2m+3)\, D^{m+1}_{(1)} = \frac{\partial C^{m+2}_{(1)}}{\partial z}$$

oder

$$(2m+3)\, D^{m+1}_{(1)} = 3\,.\,4\,.\,5 \int^{2m+3} J^{\nu-1}\, dz^{2m+3}$$

oder vollständig geschrieben und ν durch $\nu+1$ ersetzt:

$$(9.)\qquad (2m+3)\, \Sigma\, (2p+4)^{m+1|2} (2p+2)^{m+1|-2}\, J^{\nu+2p+3} = 3.4.5 \int^{2m+3} J^{\nu}\, dz^{2m+3}\,.$$

Durch die Formeln (9.) und (9. a.) sind demnach auch die Integrale ungerader Ordnung einer jeden Bessel'schen Function nach Bessel'schen Functionen entwickelt.

Für $\nu = 0$ z. B. liefern die Gleichungen (8.) und (9.) folgende speciellere Formeln:

$$(8.\mathrm{b.})\quad \begin{cases} 2\,(2\,J^2 + 4\,J^4 + 6\,J^6 + 8\,J^8 + \cdots) = \int\int J^0\, dz^2 \\ 4.6.2\,J^4 + 6.8.4\,J^6 + 8.10.6\,J^8 + \cdots = 3.4.5 \int^4 J^0\, dz^4 \\ 6.8.10.4.2\,J^6 + 8.10.12.6.4\,J^8 + 10.12.14.8.6\,J^{10} + \cdots = 3.4.5 \int^6 J^0\, z\, d^6 \\ 8.10.12.14.6.4.2\,J^8 + 10.12.14.16.8.6.4\,J^{10} + \cdots = 3.4.5 \int^8 J^0\, dz^8 \\ \cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

und

$$(9.\mathrm{b.})\quad \begin{cases} 2\,(J^1 + J^3 + J^5 + J^7 + J^9 + \cdots) = \int J^0\, dz \\ 3\,(4\,.\,2\,J^3 + 6\,.\,4\,J^5 + 8.6\,J^7 + 10\,.\,8\,J^9 + \cdots) = 3.4.5 \int^3 J^0\, dz^3 \\ 5\,(6.8.4.2\,J^5 + 8.10.6.4\,J^7 + 10.12.8.6\,J^9 + \cdots) = 3.4.5 \int^5 J^0\, dz^5 \\ 7\,(8.10.12.6.4.2\,J^7 + 10.12.14.8.6.4\,J^9 + \cdots) = 3.4.5 \int^7 J^0\, dz^7 \\ \cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Wir geben jetzt auf die Gleichungen (4.) und (5.) des §. 10. zurück und setzen darin $\nu = 0$. Dann werden sie

$$2\,A^{m}_{(0)} = 2\,z^{2m} A^{0}_{(0)} + J^{0} \sum_{p=0}^{p=m-1} (-1)^{p}\, 3^{p|2}\, 1^{p|2}\, z^{2m-2p-1}$$
$$- J^{1} \sum_{p=0}^{p=m-1} (-1)^{p} \,.\, 1^{p|2}\, 1^{p|2} \,.\, z^{2m-2p}$$

und

$$2\,B^{m}_{(0)} = 2\,z^{2m+1} A^{0}_{(0)} + J^{0} \sum_{p=0}^{p=m-1} (-1)^{p}\, 3^{p|2}\, 1^{p|2}\, z^{2m-2p}$$
$$- J^{1} \sum_{p=0}^{p=m} (-1)^{p}\, 1^{p|2}\, 1^{p|2} \,.\, z^{2m-2p+1} \,.$$

Nun ist aber

$$A^{0}_{(0)} = J^{1} + J^{3} + J^{5} + J^{7} + \cdots,$$

also nach der ersten Gleichung der Gruppe (9. b.)

$$A^{0}_{(0)} = \tfrac{1}{2} \int J^{0}\, dz \,.$$

Man hat demnach, wenn man diesen Werth oben einsetzt, und statt $A^{m}_{(0)}$ und $B^{m}_{(0)}$ die Reihen schreibt, deren Repräsentanten sie sind, folgende zwei Gleichungen:

$$(10.)\quad 2 \sum (2p+1)^{m|2} (2p+1)^{m|-2} J^{2p+1} = z^{2m} \int J^{0}\, dz$$
$$+ J^{0} \sum_{p=0}^{p=m-1} (-1)^{p} (2p+1) (1^{p|2})^{2} \,.\, z^{2m-2p-1}$$
$$- J^{1} \sum_{p=0}^{p=m-1} (-1)^{p} (1^{p|2})^{2}\, z^{2m-2p} \,,$$

$$(11.)\quad 2 \sum (2p+2)(2p+3)^{m|2} (2p+1)^{m|-2} J^{2p+2} = z^{2m+1} \int J^{0}\, dz$$
$$+ J^{0} \sum_{p=0}^{p=m-1} (-1)^{p} (2p+1) (1^{p|2})^{2}\, z^{2m-2p}$$
$$- J^{1} \sum_{p=0}^{p=m} (-1)^{p} \,.\, (1^{p|2})^{2} \,.\, z^{2m-2p+1} \,.$$

Daraus gehen für $m = 0, 1, 2, \ldots$ folgende specielle Gleichungen hervor:

$$(10.\text{a.})\quad \begin{cases} 2\,(J^{1} + J^{3} + J^{5} + J^{7} + J^{9} + \cdots) = \int J^{0}\, dz \\ 2\,(1^{2} J^{1} + 3^{2} J^{3} + 5^{2} J^{5} + 7^{2} J^{7} + 9^{2} J^{9} + \cdots) = z^{2} \int J^{0}\, dz + z\, J^{0} - z^{2} J^{1} \\ 2\,(3.5.3.1\, J^{3} + 5.7.5.3\, J^{5} + 7.9.7.5\, J^{7} + \cdots) = z^{4} \int J^{0}\, dz + J^{0} (z^{3} - 3z) \\ \qquad - J^{1} (z^{4} - z^{2} - 6) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

$$(11.a.)\begin{cases} 2\,(2\,J^2+4\,J^4+6\,J^6+8\,J^8+\cdots)=z\int J^0\,dz-z\,J^1 \\ 2\,(1.2.3\,J^2+3.4.5\,J^4+5.6.7\,J^6+\cdots)=z^3\int J^0\,dz+z^2\,J^0 \\ \qquad\qquad -J^1\,(z^3-z) \\ 2\,(4.5.7.3.1\,J^4+6.7.9.5.3\,J^6+\cdots)=z^5\int J^0\,dz+60\,J^2 \\ \qquad\qquad +J^0\,(z^4-3\,z^2) \\ \qquad\qquad -J^1\,(z^5-z^3+9\,z) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Durch geeignete Combination der im gegenwärtigen und im vorigen Paragraphen gewonnenen Resultate würde man noch eine Menge derartiger Reihen nebst ihren Summenwerthen ableiten können. Addirt man z. B. die beiden ersten Gleichungen der Gruppe (6.a. §. 13.), nämlich die Gleichungen

$$2\,\Sigma\,(2\,p+1)\,J^{2p+1}=z$$

und
$$2\,\Sigma\,(2p+1)\,2p\,(2p+2)\,J^{2p+1}=z^3\,,$$

so erhält man

$$2\,\Sigma\,(2\,p+1)^3\,J^{2p+1}=z\,(1+z^2)$$

oder

$$(12.)\quad 2\,(1^3\,J^1+3^3\,J^3+5^3\,J^5+7^3\,J^7+\cdots)=z\,(1+z^2)\,.$$

Addirt man ferner die Gleichungen

$$2\,\Sigma\,(2p)^2\,J^{2p}=z^2$$
$$2\,\Sigma\,4\,p\,J^{2p}=2\,z\int J^0\,dz-2\,z\,J^1$$
$$2\,\Sigma\,J^{2p}=1+J^0\,,$$

von denen die erste und dritte resp. die zweite und erste der Gruppe (5.a. §. 13.), die mittlere dagegen die erste der Gruppe (11.a. §. 14.), doppelt genommen, ist, so findet man

$$(13.)\quad 2\,\Sigma\,(2\,p+1)^2\,J^{2p}=1+z^2+J^0-2\,z\,J^1+2\,z\int J^0\,dz\,.$$

Will man endlich die Summe aller Bessel'schen Functionen mit positiven ganzen Indices kennen, so addire man die Gleichungen

$$2\,\Sigma\,J^{2p}=1+J^0$$

und
$$2\,\Sigma\,J^{2p+1}=\int J^0\,dz\,, \qquad (10.a.)$$

um sofort

$$2\,\Sigma\,J^p=1+J^0+\int J^0\,dz$$

oder

$$(14.)\quad 2\,(J^0+J^1+J^2+J^3+J^4+J^5+\cdots)=1+J^0+\int J^0\,dz$$

zu erhalten. U. s. w. f.

§. 15. Reihen, welche nach Quadraten von Bessel'schen Functionen fortschreiten.

Eine derartige Reihe, nämlich

$$(1.)\qquad (J^0)^2 + 2\,(J^1)^2 + 2\,(J^2)^2 + 2\,(J^3)^2 + \cdots = 1\,,$$

haben wir bereits in §. 12. kennen gelernt. Weitere solche Reihen werden wir erhalten, wenn wir die Gleichung (7. §. 3.), d. i.

$$\frac{2\nu}{z}\cdot\frac{\partial\,(J^\nu)^2}{\partial z} = (J^{\nu-1})^2 - (J^{\nu+1})^2\,,$$

einer ähnlichen Behandlung, wie in den vorigen Paragraphen die Gleichungen

$$\frac{2\nu}{z}\,J^\nu = J^{\nu-1} + J^{\nu+1}$$

und

$$2\,\frac{\partial J^\nu}{\partial z} = J^{\nu-1} - J^{\nu+1}$$

unterwerfen. Wir wollen uns jedoch damit begnügen, nur einige wenige hierher gehörige Resultate von geringerer Allgemeinheit abzuleiten.

Wir denken uns zuerst in obige Gleichung statt ν nach und nach $\nu+2$, $\nu+4$, ..., $\nu+2p$, ... eingesetzt, und sodann alle so entstandene Gleichungen bis in's Unendliche addirt, so erhalten wir

$$(2.)\qquad \frac{2}{z}\,\frac{\partial}{\partial z}\sum(\nu+2p)\,(J^{\nu+2p})^2 = (J^{\nu-1})^2\,.$$

Daraus gehen für $\nu=m+1$ und $\nu=m+2$ die zwei folgenden Gleichungen

$$(3.)\qquad 2\,\frac{\partial}{\partial z}\sum(m+2p+1)\,(J^{m+2p+1})^2 = z\,(J^m)^2\,,$$

$$(4.)\qquad 2\,\frac{\partial}{\partial z}\sum(m+2p+2)\,(J^{m+2p+2})^2 = z\,(J^{m+1})^2$$

hervor. Durch Addition und Subtraction derselben erhält man

$$(5.)\qquad 2\,\frac{\partial}{\partial z}\sum(m+p+1)\,(J^{m+p+1})^2 = z\,(J^m)^2 + z\,(J^{m+1})^2\,,$$

$$(6.)\qquad 2\,\frac{\partial}{\partial z}\sum(-1)^p\,(m+p+1)\,(J^{m+p+1})^2 = z\,(J^m)^2 - z\,(J^{m+1})^2\,.$$

Nun ist aber, mit Rücksicht auf die Gleichungen (3. u. 4. §. 3.):

$$\frac{\partial (z J^m J^{m+1})}{\partial z} = z \frac{\partial J^m J^{m+1}}{\partial z} + J^m J^{m+1}$$

$$= z J^m \left(-\frac{m+1}{z} J^{m+1} + J^m\right) + z J^{m+1} \left(\frac{m}{z} J^m - J^{m+1}\right)$$
$$+ J^m J^{m+1},$$

d. h. es ist

$$z (J^m)^2 - z (J^{m+1})^2 = \frac{\partial (z J^m J^{m+1})}{\partial z}.$$

Die Gleichung (6.) nimmt daher nach Einsetzung dieses Werthes folgende Gestalt an:

$$(6.) \qquad 2 \Sigma (-1)^p (m+p+1) (J^{m+p+1})^2 = z J^m J^{m+1}.$$

Multiplicirt man nun noch die Gleichung (7. §. 3.) mit $\nu+1$, setzt dann statt ν nach und nach $\nu+2$, $\nu+4$, $\nu+6$, ..., $\nu+2p$, ... und addirt sämmtliche so erhaltenen Gleichungen, so ergibt sich

$$(7.) \quad \frac{2}{z} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \sum (\nu+2p)(\nu+2p+1)(J^{\nu+2p})^2 = (\nu+1)(J^{\nu-1})^2$$
$$+ 2 \Sigma (J^{\nu+2p+1})^2,$$

woraus für $\nu=1$ und $\nu=2$ folgende zwei speciellere Gleichungen hervorgehen:

$$\frac{2}{z} \frac{\partial}{\partial z} \sum (2p+1)(2p+2) (J^{2p+1})^2 = 2 (J^0)^2 + 2 \sum (J^{2p+2})^2,$$

$$\frac{2}{z} \frac{\partial}{\partial z} \sum (2p+2)(2p+3) (J^{2p+2})^2 = 3 (J^1)^2 + 2 \sum (J^{2p+3})^2.$$

Addirt man dieselben, so hat man sofort

$$\frac{2}{z} \frac{\partial}{\partial z} \sum (p+1)(p+2) (J^{p+1})^2 = (J^1)^2 + 2 \sum (J^p)^2.$$

Zieht man davon die Gleichung (5.), nachdem $m=0$ in ihr gesetzt ist, nämlich

$$\frac{2}{z} \frac{\partial}{\partial z} \sum (p+1) (J^{p+1})^2 = (J^0)^2 + (J^1)^2$$

ab, so bleibt

$$\frac{2}{z} \frac{\partial}{\partial z} \sum (p+1)^2 (J^{p+1})^2 = (J^0)^2 + 2 \sum (J^{p+1})^2.$$

Nach Gleichung (1.) aber ist

$$(J^0)^2 + 2 \Sigma (J^{p+1})^2 = 1.$$

Wir haben demnach schliesslich folgende bemerkenswerthe Gleichung

$$(8.) \qquad \frac{2}{z} \frac{\partial}{\partial z} \sum (p+1)^2 (J^{p+1})^2 = 1$$

oder

$$(8.\text{a.})\quad 1^2 (J^1)^2 + 2^2 (J^2)^2 + 3^2 (J^3)^2 + 4^2 (J^4)^2 + \cdots = \frac{z^2}{4}\,.$$

Man sieht leicht ein, dass auf dem hier betretenen Wege noch manches derartige Resultat gefunden werden könnte. Wir begnügen uns jedoch mit dem bisher gefundenen, um nicht durch die Ueberfülle von Einzelnheiten zu ermüden.

Die Formeln (5.) und (6.) des §. 13. sind, soviel mir bekannt ist, zuerst von Schlömilch*) gegeben worden, die Formeln (11.) ebendaselbst sind schon seit Bessel bekannt. Dagegen scheinen die in den §§. 14. und 15. entwickelten Gleichungen grösstentheils neu zu sein, wenn man nicht etwa sämmtliche Resultate der §§. 13. und 14. als Beispiele betrachten will zu dem von Neumann**) bewiesenen Lehrsatz: Jede Function $f(z)$, welche innerhalb eines Kreises mit dem Mittelpunkt O (Anfangspunkt der Zahlenebene) eindeutig und stetig bleibt, kann nach Bessel'schen Functionen (erster Art) entwickelt werden. Die Formeln des gegenwärtigen Paragraphen scheinen darauf hinzudeuten, dass, wenigstens für Functionen von geradem Grade, eine ähnliche Entwickelung nach Quadraten von Bessel'schen Functionen möglich ist.

Eine Frage, nämlich die nach der Convergenz der in den §§. 13—15. entwickelten Reihen, wurde bisher noch gar nicht berührt. Es lässt sich aber leicht zeigen, dass diese Reihen sämmtlich convergent sind für jeden Werth von z. Nehmen wir als Beispiel die in §. 13. mit $A^n_{(\nu)}$ bezeichnete Reihe. Der Quotient des $(p+1)^{\text{ten}}$ Gliedes durch das p^{te} ist

$$\frac{(\nu+2p+1)^{n|2}\,(\nu+2p+1)^{n|-2}}{(\nu+2p-1)^{n|2}\,(\nu+2p-1)^{n|-2}}\cdot\frac{J^{\nu+2p+1}}{J^{\nu+2p-1}}$$

$$=\frac{(\nu+2p+1)\,(\nu+2p+2n-1)}{(\nu+2p-1)\,(\nu+2p-2n+1)}\cdot\frac{J^{\nu+2p+1}}{J^{\nu+2p-1}}\,.$$

Bei wachsendem p nähert sich der Quotient der beiden Bessel'schen Functionen der Null (ein Blick auf den Kettenbruch (3. §. 2.) genügt, um sich davon zu überzeugen), während gleichzeitig der vorausgestellte Factor gegen die Einheit rückt. Die Convergenz der Reihe $A^n_{(\nu)}$ ist dadurch ausser Zweifel gesetzt, und es leuchtet

---

*) Schlömilch, Zeitschrift für Math. u. Phys., II. Jahrg. S. 141.

**) C. Neumann, Theorie der Bessel'schen Functionen. Leipzig, 1867.

ein, dass auch alle andern hier vorkommenden Reihen, auf dieselbe Weise behandelt, zu dem nämlichen Resultate führen.

§. 16. Entwickelung von $J_{(z)}^{m+\frac{1}{2}}$.

Wenn ν ein ungerades Vielfaches von $\frac{1}{2}$ $\left(=\frac{2m+1}{2}\right)$ ist, so lässt sich das Integral

$$\int_{-1}^{+1} e^{izu}\,(1-u^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\,du$$

in geschlossener Form herstellen.

Ist nämlich $\varphi(u)$ eine beliebige Function von u, so erhält man durch fortgesetzte Anwendung der theilweisen Integration

$$\int e^{izu}\,\varphi(u)\,.\,du = -\,e^{izu}\sum \frac{i^{p+1}}{z^{p+1}}\,\varphi^p(u)\;,$$

wo $\varphi^p(u)$ den p^{ten} Differentialquotienten von $\varphi(u)$ ausdrücken soll. Hier aber ist, für $\nu=\frac{2m+1}{2}$,

$$\varphi(u) = (1-u^2)^m = (1+u)^m\,(1-u)^m\,,$$

folglich, mit Anwendung des binomischen Lehrsatzes

$$\varphi(u+h) = (1+u+h)^m(1-u-h)^m$$

$$= \sum \frac{m^{q|-1}}{q!}\,(1+u)^{m-q}\,h^q\,.\sum (-1)^r\cdot\frac{m^{r|-1}}{r!}\,(1-u)^{m-r}\,h^r$$

$$= \sum\sum (-1)^r\cdot\frac{m^{q|-1}\,m^{r|-1}}{q!\,r!}\,(1+u)^{m-q}\,(1-u)^{m-r}\,h^{q+r}\,.$$

Der Coefficient von h^p in dieser Entwickelung ist nichts anderes als $\varphi^p(u)$ noch dividirt durch $p!$. Demnach hat man

$$\varphi^p(u) = \sum (-1)^r\cdot\frac{p!}{q!\,r!}\,m^{q|-1}\,m^{r|-1}\,(1+u)^{m-q}\,(1-u)^{m-r}$$
$$\text{für }(q+r=p)\,,$$

wo in der Summe statt q und r nur solche positive ganze Zahlen, die Null mit inbegriffen, gesetzt werden dürfen, welche der Bedingungsgleichung $q+r=p$ genügen.

Setzt man darin $u=1$, so verschwinden alle Glieder der Summe wegen des Factors $1-u$, mit Ausnahme desjenigen, welches diesen Factor auf der Potenz Null enthält. Man hat also gleichzeitig $r=m$, $q=p-m$, $m-q=2m-p$ zu nehmen, und erhält

$$[\varphi^p(u)]_1 = (-1)^m \cdot \frac{p!}{(p-m)!} m^{p-m|-1} 2^{2m-p}.$$

Substituirt man dagegen $u = -1$ in $\varphi^p(u)$, so verschwinden alle Glieder, welche den Factor $1+u$ auf einer andern, als der 0ten Potenz enthalten; indem man daher $q=m, r=p-m, m-r=2m-p$ setzt, bekommt man

$$[\varphi^p(u)]_{-1} = (-1)^{p-m} \frac{p!}{(p-m)!} m^{p-m|-1} 2^{2m-p}.$$

Führt man daher oben die Grenzen -1 und $+1$ ein, so ergibt sich

$$\int_{-1}^{+1} e^{izu}(1-u^2)^m \, . \, du = -e^{iz} \sum (-1)^m \cdot \frac{p!}{(p-m)!} m^{p-m|-1} \, . \, 2^{2m-p} \, . \, \frac{i^{p+1}}{z^{p+1}}$$

$$+ e^{-iz} \sum (-1)^{p-m} \frac{p!}{(p-m)!} m^{p-m|-1} 2^{2m-p} \frac{i^{p+1}}{z^{p+1}},$$

oder, wenn man, da p offenbar nicht kleiner als m sein kann, lieber $m+p$ statt p schreibt

$$\int_{-1}^{+1} e^{izu}(1-u^2)^m du = -(-1)^m 2^m e^{iz} \sum \frac{(m+p)!\, m^{p|-1}}{2^{p|2}} \cdot \frac{i^{m+p+1}}{z^{m+p+1}}$$

$$+ 2^m e^{-iz} \sum (-1)^p \cdot \frac{(m+p)!\, m^{p|-1}}{2^{p|2}} \cdot \frac{i^{m+p+1}}{z^{m+p+1}}.$$

Da nun

$$J_{(z)}^{m+\frac{1}{2}} = \frac{z^{m+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi} \, . \, 2^m \, . \, m!} \int_{-1}^{+1} e^{izu}(1-u^2)^m \, . \, du$$

ist, so hat man

$$(1.) \qquad J_{(z)}^{m+\frac{1}{2}} = (-i)^{m+1} \cdot \frac{e^{iz}}{\sqrt{2\pi z}} \sum \frac{(m+1)^{p|1}\, m^{p|-1}}{2^{p|2}} \cdot \frac{i^p}{z^p}$$

$$+ i^{m+1} \cdot \frac{e^{-iz}}{\sqrt{2\pi z}} \sum (-1)^p \cdot \frac{(m+1)^{p|1}\, m^{p|-1}}{2^{p|2}} \cdot \frac{i^p}{z^p},$$

oder, wenn man zur Abkürzung

$$(-i)^{m+1} \cdot \frac{e^{iz}}{\sqrt{2\pi z}} \sum \frac{(m+1)^{p|1}\, m^{p|-1}}{2^{p|2}} \cdot \frac{i^p}{z^p} = R_{(z)}^{m+\frac{1}{2}}$$

setzt:

$$(1.a.) \qquad J_{(z)}^{m+\frac{1}{2}} = R_{(z)}^{m+\frac{1}{2}} - (-1)^m \, . \, i\, R_{(-z)}^{m+\frac{1}{2}}.$$

Nun ist aber

$$\sum \frac{(m+1)^{p|1}\, m^{p|-1}}{2^{p|2}} \cdot \frac{i^p}{z^p} = \sum (-1)^p \cdot \frac{(m+1)^{2p|1}\, m^{2p|-1}}{2^{2p|2}} \cdot \frac{1}{z^{2p}}$$

$$+ i \sum (-1)^p \cdot \frac{(m+1)^{2p+1|1}\, m^{2p+1|-1}}{2^{2p+1|2}} \cdot \frac{1}{z^{2p+1}} = P^m + Q^m i$$

und ebenso

$$\sum (-1)^p \cdot \frac{(m+1)^{p|1}\, m^{p|-1}}{2^{p|2}} \cdot \frac{i^p}{z^p} = P^m - Q^m i .$$

Daher hat man

$$J_{(z)}^{m+\frac{1}{2}} = \frac{i^{m+1}}{\sqrt{2\pi z}} \left\{(-1)^{m+1} e^{iz} (P^m + Q^m i) + e^{-iz} (P^m - Q^m i)\right\}.$$

Ist nun m gerade $= 2n$, so erhält man daraus

$$(2.) \qquad J_{(z)}^{2n+\frac{1}{2}} = (-1)^n \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{P^{2n} \sin z + Q^{2n} \cos z\right\}$$

und ebenso für ein ungerades m $(= 2n + 1)$

$$(3.) \qquad J_{(z)}^{2n+\frac{3}{2}} = (-1)^n \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{Q^{2n+1} \sin z - P^{2n+1} \cos z\right\}.$$

In diesen Gleichungen ist

$$(4.) \qquad \begin{cases} P^m = \sum (-1)^p \cdot \dfrac{(m+1)^{2p|1}\, m^{2p|-1}}{2^{2p|2}} \cdot \dfrac{1}{z^{2p}} \\ Q^m = \sum (-1)^p \cdot \dfrac{(m+1)^{2p+1|1}\, m^{2p+1|-1}}{2^{2p+1|2}} \cdot \dfrac{1}{z^{2p+1}}, \end{cases}$$

während die oben eingeführte Function $R_{(z)}^{m+\frac{1}{2}}$, in P und Q ausgedrückt, folgende Gestalt annimmt:

$$R_{(z)}^{m+\frac{1}{2}} = (-i)^{m+1} \cdot \frac{e^{iz}}{\sqrt{2\pi z}} (P^m + Q^m i) .$$

Einen für beide Fälle gemeinsamen Ausdruck erhält man mit leichter Mühe aus der Reductionsformel 1. (§. 1.). Setzt man nämlich daselbst $m + \frac{3}{2}$ statt ν, so wird

$$J^{m+\frac{3}{2}} = J^{\frac{3}{2}} \sum (-1)^p \cdot \frac{(m-p)^{p|-1}}{p!} \frac{(2p+3)^{m-2p|2}}{z^{m-2p}}$$

$$- J^{\frac{1}{2}} \sum (-1)^p \cdot \frac{(m-1-p)^{p|-1}}{p!} \frac{(2p+5)^{m-1-2p|2}}{z^{m-1-2p}}.$$

Es ist aber, wie man leicht findet:

$$J^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cdot \sin z ,$$

$$J^{\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(\frac{\sin z}{z} - \cos z\right).$$

Setzt man diese Werthe oben ein, so ergibt sich zunächst:

$$J^{m+\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cdot \sin z \sum (-1)^p \cdot \frac{(m-p)^{p|-1}}{p!} \frac{(2p+3)^{m-2p|2}}{z^{m+1-2p}}$$
$$- \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cdot \cos z \sum (-1)^p \cdot \frac{(m-p)^{p|-1}}{p!} \frac{(2p+3)^{m-2p|2}}{z^{m-2p}}$$
$$- \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cdot \sin z \sum (-1)^p \cdot \frac{(m-1-p)^{p|-1}}{p!} \frac{(2p+5)^{m-1-2p|2}}{z^{m-1-2p}}.$$

Hier müssen noch die mit $\sin z$ multiplicirten Summen in eine einzige zusammengefasst werden. Sondert man zu diesem Zweck von der ersteren das Anfangsglied ab, indem man zuerst $p = 0$, dann $p + 1$ statt p setzt, so erhält man

$$\frac{3^{m|2}}{z^{m+1}} - \sum (-1)^p \cdot \frac{(m-1-p)^{p+1|-1}}{(p+1)!} \frac{(2p+5)^{m-2p-2|2}}{z^{m-1-2p}}$$
$$- \sum (-1)^p \cdot \frac{(m-1-p)^{p|-1}}{p!} \frac{(2p+5)^{m-1-2p|2}}{z^{m-1-2p}}$$
$$= \frac{3^{m|2}}{z^{m+1}} - \sum (-1)^p \cdot \frac{(m-1-p)^{p|-1}}{p!} \frac{(2p+5)^{m-2p-2|2}}{z^{m-1-2p}} \cdot \left(\frac{m-1-2p}{p+1} + 2m+1-2p\right)$$
$$= \frac{3^{m|2}}{z^{m+1}} - \sum (-1)^p \cdot \frac{(m-1-p)^{p|-1}}{p!} \frac{(2p+5)^{m-2p-2|2}}{z^{m-1-2p}} \cdot \frac{(m-p)(2p+3)}{p+1}$$
$$= \frac{3^{m|2}}{z^{m+1}} + \sum (-1)^{p+1} \cdot \frac{(m-p)^{p+1|-1}}{(p+1)!} \cdot \frac{(2p+3)^{m-1-2p|2}}{z^{m-1-2p}}$$
$$= \sum (-1)^p \cdot \frac{(m-p-1)^{p|-1}}{p!} \frac{(2p+1)^{m+1-2p|2}}{z^{m+1-2p}}.$$

Man hat also

$$(5.)\quad J_{(z)}^{m+\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cdot \sin z \sum (-1)^p \cdot \frac{(m-p-1)^{p|-1}}{p!} \cdot \frac{(2p+1)^{m+1-2p|2}}{z^{m+1-2p}}$$
$$- \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cdot \cos z \sum (-1)^p \cdot \frac{(m-p)^{p|-1}}{p!} \cdot \frac{(2p+3)^{m-2p|2}}{z^{m-2p}}.$$

Diese Formel unterscheidet sich von den obigen (2.) und (3.) durch nichts, als dass dort die Summen nach steigenden, hier aber nach fallenden Potenzen von $\frac{1}{z}$ geordnet sind. Wollte man hier ebenfalls nach steigenden Potenzen ordnen, so müsste man die Fälle des geraden und ungeraden m auseinanderhalten. und würde dann nothwendig auf die Formeln (2.) und (3.) zurückkommen.

Selbstverständlich genügt die hier entwickelte Function $J_{(z)}^{m+\frac{1}{2}}$ den Grundgesetzen (II.) und (III.) der Bessel'schen Functionen, und

folglich auch allen übrigen Relationen, welche für jedes ν daraus abgeleitet wurden. Nun behaupten wir aber, dass nicht bloss $J_{(z)}^{m+\frac{1}{2}}$ selbst, sondern auch die oben definirte Function $R_{(z)}^{m+\frac{1}{2}}$ für sich allein schon, und dann nothwendig auch $(-1)^m R_{(-z)}^{m+\frac{1}{2}}$ sich diesen Grundgesetzen und dann auch allen daraus gezogenen Consequenzen unterwirft.

Es ist nämlich

$$R_{(z)}^{m-\frac{1}{2}} = (-i)^m \cdot \frac{e^{iz}}{\sqrt{2\pi z}} \sum \frac{m^{p|1}(m-1)^{p|-1}}{2^{p|2}} \cdot \frac{i^p}{z^p},$$

$$R^{m+\frac{3}{2}} = -(-i)^m \cdot \frac{e^{iz}}{\sqrt{2\pi z}} \sum \frac{(m+2)^{p|1}(m+1)^{p|-1}}{2^{p|2}} \cdot \frac{i^p}{z^p},$$

Addirt man diese beiden Gleichungen, so findet man, weil

$$\begin{aligned} & m^{p|1}(m-1)^{p|-1} - (m+2)^{p|1}(m+1)^{p|-1} \\ &= (m+1)^{p-1|1} m^{p+1|-1} - (m+1)^{p+1|-1} m^{p-1|-1} \\ &= (m+1)^{p-1|1} m^{p-1|-1} \{(m-p+1)(m-p) - (m+p)(m+1-p)\} \\ &= -2p(2m+1)(m+1)^{p-1|1} m^{p-1|-1} \end{aligned}$$

ist, zunächst:

$$R_{(z)}^{m-\frac{1}{2}} + R_{(z)}^{m+\frac{3}{2}} = -(-i)^m (2m+1) \frac{e^{iz}}{\sqrt{2\pi z}} \sum \frac{(m+1)^{p-1|1} m^{p-1|-1}}{2^{p-1|2}} \cdot \frac{i^p}{z^p},$$

wo jedoch in der Summe zur Rechten p nicht Null werden darf, da in den obigen Summen die Anfangsglieder, in welchen $p=0$ ist, sich wegheben. Schreibt man daher besser $(p+1)$ statt p, so hat man

$$R_{(z)}^{m-\frac{1}{2}} + R_{(z)}^{m+\frac{3}{2}} = (-i)^{m+1} \cdot \frac{2(m+\frac{1}{2})}{z} \cdot \frac{e^{iz}}{\sqrt{2\pi z}} \sum \frac{(m+1)^{p|1} m^{p|-1}}{2^{p|2}} \cdot \frac{i^p}{z^p}$$

oder

$$R_{(z)}^{m-\frac{1}{2}} + R_{(z)}^{m+\frac{3}{2}} = \frac{2(m+\frac{1}{2})}{z} R_{(z)}^{m+\frac{1}{2}}.$$

Diese Gleichung ist aber keine andere, als die Gleichung (II.a.) angewendet auf die Function $R_{(z)}^{m+\frac{1}{2}}$.

Ebenso leicht lässt sich zeigen, dass auch das zweite Grundgesetz (III.) für $R_{(z)}^{m+\frac{1}{2}}$ gelte. Wir setzen $\sqrt{z}$ statt z und multipliciren mit $z^{-\frac{m}{2}-\frac{1}{4}}$, so wird

$$z^{-\frac{m}{2}-\frac{1}{4}} R_{(\sqrt{z})}^{m+\frac{1}{2}} = (-i)^{m+1} \cdot \frac{e^{i\sqrt{z}}}{\sqrt{2\pi}} \sum \frac{(m+1)^{p|1} m^{p|-1}}{2^{p|2}} i^p \cdot z^{-\frac{m+p+1}{2}}.$$

Differentiirt man hier beiderseits nach z, so kommt:

$$\frac{\partial\left(z^{-\frac{m}{2}-\frac{1}{4}} R^{m+\frac{1}{2}}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial z} = (-i)^{m+1} \cdot i \cdot \frac{e^{i\sqrt{z}}}{2\sqrt{2\pi}} \sum \frac{(m+1)^{p|1} m^{p|-1}}{2^{p|2}} \cdot i^p \cdot z^{-\frac{m+p+2}{2}}$$

$$- (-i)^{m+1} \cdot \frac{e^{i\sqrt{z}}}{2\sqrt{2\pi}} \sum \frac{(m+1)^{p|1} m^{p|-1}}{2^{p|2}} \cdot i^p \cdot (m+p+1)\, z^{-\frac{m+p+3}{2}}$$

$$= (-i)^{m+1} \cdot i \frac{e^{i\sqrt{z}}}{2\sqrt{2\pi}} \cdot z^{-\frac{m+2}{2}}$$

$$+ (-i)^{m+1} \cdot i \frac{e^{i\sqrt{z}}}{2\sqrt{2\pi}} \sum \frac{(m+1)^{p+1|1} m^{p+1|-1}}{2^{p+1|2}} i^{p+1} \cdot z^{-\frac{m+p+3}{2}}$$

$$+ (-i)^{m+1} \cdot i \cdot \frac{e^{i\sqrt{z}}}{2\sqrt{2\pi}} \sum \frac{(m+1)^{p|1} m^{p|-1}}{2^{p|2}} \cdot i^{p+1} (m+p+1)\, z^{-\frac{m+p+3}{2}}.$$

Nun ist aber

$$(m+1)^{p+1|1} m^{p+1|-1} = (m+2)^{p|1} (m+1)^{p+2|-1},$$

$$(m+1)^{p|1} m^{p|-1} (m+p+1) = (m+2)^{p|1} (m+1)^{p+1|-1},$$

demnach

$$\frac{(m+1)^{p+1|1} m^{p+1|-1}}{2^{p+1|2}} + \frac{(m+1)^{p|1} m^{p|-1}}{2^{p|2}} (m+p+1)$$

$$= \frac{(m+2)^{p|1} (m+1)^{p+1|-1}}{2^{p|2}} \cdot \left(\frac{m-p}{2p+2} + 1\right)$$

$$= \frac{(m+2)^{p|1} (m+1)^{p+1|-1}}{2^{p|2}} \cdot \frac{m+p+2}{2p+2} = \frac{(m+2)^{p+1|1} (m+1)^{p+1|-1}}{2^{p+1|2}}.$$

Fasst man jetzt obige zwei Summen in eine zusammen, so erhält man

$$\frac{\partial\left(z^{-\frac{m}{2}-\frac{1}{4}} R^{m+\frac{1}{2}}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial z} = -(-i)^{m+2} \cdot \frac{e^{i\sqrt{z}}}{2\sqrt{2\pi}} \cdot z^{-\frac{m+2}{2}}$$

$$- (-i)^{m+2} \cdot \frac{e^{i\sqrt{z}}}{2\sqrt{2\pi}} \sum \frac{(m+2)^{p+1|1} (m+1)^{p+1|-1}}{2^{p+1|2}} i^{p+1} \cdot z^{-\frac{m+p+3}{2}}$$

$$= -(-i)^{m+2} \cdot \frac{e^{i\sqrt{z}}}{2\sqrt{2\pi}} \sum \frac{(m+2)^{p|1} \cdot (m+1)^{p|-1}}{2^{p|2}} \cdot i^p \cdot z^{-\frac{m+p+2}{2}},$$

oder endlich

$$\frac{\partial\left(z^{-\frac{m}{2}-\frac{1}{4}} R^{m+\frac{1}{2}}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial z} = -\tfrac{1}{2} \cdot z^{-\frac{m+1}{2}-\frac{1}{4}} \cdot R^{m+\frac{3}{2}}_{(\sqrt{z})},$$

wie behauptet worden.

§. 17. Entwickelung von $J_{(z)}^{\nu}$ nach negativen Potenzen von z.

Aus den zuletzt geführten Beweisen geht hervor, dass die beiden Bestandtheile von $J_{(z)}^{m+\frac{1}{2}}$, $R_{(z)}^{m+\frac{1}{2}}$ und $(-1)^m i R_{(-z)}^{m+\frac{1}{2}}$, vermöge ihrer Form allein schon, ohne Rücksicht auf den speciellen Werth, welchen man dem m beigelegt denken mag, den Grundgesetzen (II. und III.) der Bessel'schen Functionen genügen. Die unendliche Reihe, in welche der Ausdruck

$$J_{(z)}^{m+\frac{1}{2}} = \frac{i^{m+1}}{\sqrt{2\pi z}} \left\{(-1)^{m+1} e^{iz} (P^m + Q^m i) + e^{-iz} (P^m - Q^m i)\right\}$$

für ein gebrochenes m übergeht, wird daher ebenfalls noch jene beiden Grundgleichungen erfüllen und sonach in Form und Eigenschaften mit den bisher betrachteten Bessel'schen Functionen übereinstimmen. Wir halten uns daher für berechtigt, die vorstehende Gleichung auch dann noch als Ausdruck der Bessel'schen Functionen anzusehen, wenn m gebrochen ist, mit dem Vorbehalte freilich, dass die fragliche unendliche Reihe überhaupt zulässig sei.

Unter diesem Vorbehalte haben wir also, wenn wir $m + \frac{1}{2} = \nu$ setzen

$$(1.)\quad J_{(z)}^{\nu} = \frac{i^{\nu+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi z}} \left\{(-1)^{\nu+\frac{1}{2}} e^{iz} (P^{\nu-\frac{1}{2}} + Q^{\nu-\frac{1}{2}} i) + e^{-iz} (P^{\nu-\frac{1}{2}} - Q^{\nu-\frac{1}{2}} i)\right\}.$$

Setzen wir in dieser Formel zuerst $2n$ statt ν, so wird dieselbe zunächst, wenn wir der Kürze wegen P_1 und Q_1 resp. statt $P^{2n-\frac{1}{2}}$ $Q^{2n-\frac{1}{2}}$ schreiben:

$$J_{(z)}^{2n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi z}} \left\{(-i)^{\frac{1}{2}} e^{iz} (P_1 + Q_1 i) + i^{\frac{1}{2}} e^{-iz} (P_1 - Q_1 i)\right\}.$$

Denken wir uns unter i stets seinen positiven Werth $+i$, so ist

$$(-i)^{\frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{4}\pi i} \quad \text{und} \quad i^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{4}\pi i},$$

folglich

$$J_{(z)}^{2n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi z}} \left\{e^{i(z-\frac{1}{4}\pi)} (P_1 + Q_1 i) + e^{-i(z-\frac{1}{4}\pi)} (P_1 - Q_1 i)\right\}$$

oder

$$(2.)\quad J_{(z)}^{2n} = (-1)^n \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{P_1 \cos(z - \tfrac{1}{4}\pi) - Q_1 \sin(z - \tfrac{1}{4}\pi)\right\},$$

worin

$$(2.a.)\quad \begin{cases} P_1 = \sum (-1)^p \cdot \dfrac{(4n+1)^{2p|2}\,(4n-1)^{2p|-2}}{8^{2p|8}} \cdot \dfrac{1}{z^{2p}} \\ Q_1 = \sum (-1)^p \cdot \dfrac{(4n+1)^{2p+1|2}\,(4n-1)^{2p+1|-2}}{8^{2p+1|8}} \cdot \dfrac{1}{z^{2p+1}} \end{cases}$$

ist.

Setzt man ferner $2n+1$ statt ν, so ergibt sich zunächst

$$J_{(z)}^{2n+1} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi z}} \left\{(-i)^{\frac{3}{2}} e^{iz} (P_2 + Q_2 i) + i^{\frac{3}{2}} e^{-iz} (P_2 - Q_2 i)\right\}.$$

Da nun

$$(-i)^{\frac{3}{2}} = e^{-\frac{3}{4}\pi i} \quad \text{und} \quad i^{\frac{3}{2}} = e^{\frac{3}{4}\pi i}$$

ist, so hat man weiter

$$J_{(z)}^{2n+1} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi z}} \left\{e^{i(z-\frac{3}{4}\pi)} (P_2 + Q_2 i) + e^{-i(z-\frac{3}{4}\pi)} (P_2 - Q_2 i)\right\},$$

woraus sofort eine mit der obigen fast gleichlautende Formel hervorgehen würde, mit dem einzigen Unterschiede nämlich, dass P_2 und Q_2 statt P_1 und Q_1, und $z-\frac{3}{4}\pi$ statt $z-\frac{1}{4}\pi$ stünde. Schreibt man aber lieber $\sin(z-\frac{1}{4}\pi)$ statt $\cos(z-\frac{3}{4}\pi)$ und $-\cos(z-\frac{1}{4}\pi)$ statt $\sin(z-\frac{3}{4}\pi)$, so hat man

$$(3.)\quad J_{(z)}^{2n+1} = (-1)^n \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{P_2 \sin(z-\tfrac{1}{4}\pi) + Q_2 \cos(z-\tfrac{1}{4}\pi)\right\}.$$

Darin ist

$$(3.a.)\quad \begin{cases} P_2 = \sum (-1)^p \cdot \dfrac{(4n+3)^{2p|2}\,(4n+1)^{2p|-2}}{8^{2p|8}} \cdot \dfrac{1}{z^{2p}} \\ Q_2 = \sum (-1)^p \cdot \dfrac{(4n+3)^{2p+1|2}\,(4n+1)^{2p+1|-2}}{8^{2p+1|8}} \cdot \dfrac{1}{z^{2p+1}}. \end{cases}$$

Für $n = 0$ z. B. resultiren aus (2.) und (3.) folgende zwei Formeln

$$(2.b.)\quad J_{(z)}^{0} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos(z-\tfrac{1}{4}\pi) \left\{1 - \frac{1^2.3^2}{8.16}\left(\frac{1}{z}\right)^2 + \frac{1^2.3^2.5^2.7^2}{8.16.24.32}\left(\frac{1}{z}\right)^4 - \cdots\right\}$$
$$+ \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin(z-\tfrac{1}{4}\pi) \left\{\frac{1^2}{8}\left(\frac{1}{z}\right) - \frac{1^2.3^2.5^2}{8.16.24}\left(\frac{1}{z}\right)^3 + \frac{1^2.3^2.5^2.7^2.9^2}{8.16.24.32.40}\left(\frac{1}{z}\right)^5 - \cdots\right\},$$

$$(3.b.)\quad J_{(z)}^{1} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin(z-\tfrac{1}{4}\pi) \left\{1 + \frac{3.5.1}{8.16}\left(\frac{1}{z}\right)^2 - \frac{3.5.7.9.1.3.5}{8.16.24.32}\left(\frac{1}{z}\right)^4 + \cdots\right\}$$
$$+ \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos(z-\tfrac{1}{4}\pi) \left\{\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{z} - \frac{3.5.7.1.3}{8.16.24}\left(\frac{1}{z}\right)^3 + \frac{3.5.7.9.11.1.3.5.7}{8.16.24.32.40}\left(\frac{1}{z}\right)^5 - \cdots\right\},$$

Formeln, welche von Hansen*) bei der Berechnung seiner Tabellen der Bessel'schen Functionen J^0 und J^1 benützt wurden.

---

*) Hansen, Ermittelung der absoluten Störungen in Ellipsen von beliebiger Excentricität und Neigung; Schriften der Sternwarte Seeberg, Gotha 1843.

Die in (2.) und (3.) vorkommenden unendlichen Reihen P und Q sind nun freilich divergent; sie gehören aber zur nützlichen Classe der halbconvergenten Reihen, bei welchen der jedesmal begangene Fehler kleiner ist als das letzte in Rechnung gezogene Glied. Um dies nachzuweisen, sei es gestattet, die Reihe (2. b.) nochmals zu entwickeln auf dem Wege, welchen Lipschitz*) gezeigt hat.

Wir schreiben zu dem Ende $J^0_{(z)}$ in der Form

$$J^0_{(z)} = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{\cos(zu)}{\sqrt{1-u^2}} \cdot du \tag{4.}$$

und betrachten den Ausdruck $\frac{\cos zu}{\sqrt{1-u^2}}$ als den reellen Theil der Function $\frac{e^{-zw}}{\sqrt{1+w^2}}$ für $w = ui$.

Darin werde nun für w die allgemein complexe Grösse $v + ui$ gesetzt und eine Integration nach $dw = dv + i \, . \, du$ ausgeführt. Wird $v + ui$ in üblicher Weise durch einen Punkt der Zahlenebene repräsentirt, dessen rechtwinklige Coordinaten v und u sind, so gilt der bekannte Satz, dass ein über den Umfang einer geschlossenen Linie hinerstrecktes Integral stets den Werth Null hat, wenn die zu integrirende Function im Innern des abgegrenzten Flächenstücks allenthalben eindeutig, stetig und endlich ist. Im jetzigen Falle werde die Function $\frac{e^{-zw}}{\sqrt{1+w^2}}$ über den Umfang eines Rechtecks integrirt, dessen Ecken die Punkte (0), (h), ($h+i$), (i) sind, wo h einen beliebigen positiven Werth bezeichnet; man erkennt alsdann leicht, dass unsere Function im Innern des Rechtecks eindeutig ist, wenn man festsetzt, dass sie stetig sei und für $w = 0$ den Werth $+1$ habe. Für $w + i$ wird sie allerdings unendlich, jedoch so, dass der Werth des Integrals dadurch keine Aenderung erleidet und der oben ausgesprochene Satz seine Geltung beibehält.

Indem man beachtet, dass alle Theile der Integration entweder der Abscissen- oder der Ordinatenaxe parallel genommen werden, und dass der Umfang des Rechtecks stets in demselben

*) Lipschitz, die Bessel'sche Transcendente J. Borchardt's Journal; Bd. 56; 1859.

(positiven) Sinne durchlaufen werden muss, erhält man folgende Gleichung:

$$\int_0^h \frac{e^{-zv}}{\sqrt{1+v^2}} \cdot dv + i \int_0^1 \frac{e^{-z(h+ui)}}{\sqrt{1+(h+ui)^2}} \cdot du - \int_0^h \frac{e^{-z(v+i)}}{\sqrt{1+(v+i)^2}} \cdot dv$$
$$- i \int_0^1 \frac{e^{-izu}}{\sqrt{1-u^2}} \cdot du = 0 .$$

Lassen wir nun h über jede Grenze wachsen, so verschwindet das zweite Integral, und bei Sonderung des Reellen und Imaginären liefert der Coefficient von i die Gleichung

$$(5.) \qquad \int_0 \frac{\cos zu}{\sqrt{1-u^2}} \cdot du = i \int_0^\infty \frac{e^{-z(v+i)}}{\sqrt{1+(v+i)^2}} \cdot du ,$$

wo zur Rechten nur der reelle Theil zu nehmen ist. Wir setzen nun

$$1 + (v+i)^2 = 2iv + v^2 = \varrho e^{\varphi i},$$

so dass $\varrho = \sqrt{v^4 + 4v^2}$ und $tg\,\varphi = \frac{2}{v}$ wird. Dann ist der Nenner zur Rechten

$$\sqrt{1+(v+i)^2} = \varrho^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}\varphi i} = e^{\frac{1}{4}\pi i} \varrho^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}(\varphi - \frac{1}{2}\pi)i}$$

oder, weil

$$\varrho e^{(\varphi - \frac{1}{2}\pi)i} = (2iv + v^2) \,.\, (-i) = 2v - iv^2$$

ist:

$$\sqrt{1+(v+i)^2} = e^{\frac{1}{4}\pi i} \,.\, \sqrt{2v - iv^2} .$$

Wir haben also, wenn wir noch bedenken, das $i = e^{\frac{1}{2}\pi i}$ ist:

$$\int_0^1 \frac{(\cos zu)}{\sqrt{1-u^2}} \cdot du = e^{\frac{1}{4}\pi i} \int_0^\infty \frac{e^{-z(v+i)}}{\sqrt{2v - iv^2}} \cdot dv ,$$

und wenn wir $zv = \beta$ einführen

$$\int_0^1 \frac{\cos zu}{\sqrt{1-u^2}} \cdot du = \frac{e^{-(z-\frac{1}{4}\pi)i}}{\sqrt{2z}} \int_0^\infty \frac{e^{-\beta}\beta^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{1 - \frac{i\beta}{2z}}} \cdot d\beta .$$

Wir erhalten demnach, wenn wir zur Rechten nur den reellen Theil beibehalten, für $J^0_{(z)}$ folgende Gleichung

$$(6.)\quad J^0_{(z)} = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\cos(z-\frac{1}{4}\pi)}{\sqrt{2z}}\int_0^\infty e^{-\beta}\beta^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\left(1-\frac{i\beta}{2z}\right)^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{\left(1+\frac{i\beta}{2z}\right)^{\frac{1}{2}}}\right)d\beta$$
$$-\frac{i}{\pi}\cdot\frac{\sin(z-\frac{1}{4}\pi)}{\sqrt{2z}}\int_0^\infty e^{-\beta}\beta^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\left(1-\frac{i\beta}{2z}\right)^{\frac{1}{2}}}-\frac{1}{\left(1+\frac{i\beta}{2z}\right)^{\frac{1}{2}}}\right)d\beta\,.$$

Entwickelt man die hierin vorkommenden Wurzelgrössen nach dem begrenzten Taylor'schen Lehrsatz, so findet man

$$(7.)\begin{cases}\dfrac{1}{\left(1-\frac{i\beta}{2z}\right)^{\frac{1}{2}}}+\dfrac{1}{\left(1+\frac{i\beta}{2z}\right)^{\frac{1}{2}}} = 2\displaystyle\sum_{p=0}^{p=m-1}(-1)^p\cdot\frac{1^{2p|2}}{2^{2p|2}}\cdot\left(\frac{\beta}{2z}\right)^{2p}+(-1)^m R_m\\[2ex] \dfrac{1}{\left(1-\frac{i\beta}{2z}\right)^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{1}{\left(1+\frac{i\beta}{2z}\right)^{\frac{1}{2}}} = 2i\displaystyle\sum_{p=0}^{p=m-1}(-1)^p\cdot\frac{1^{2p+1|2}}{2^{2p+1|2}}\cdot\left(\frac{\beta}{2z}\right)^{2p+1}+(-1)^m R'_m\,,\end{cases}$$

wo zur Abkürzung

$$R_m = \frac{1^{2m|2}}{2^{2m|2}}\left(\frac{\beta}{2z}\right)^{2m}\left(\frac{1}{\left(1-i\frac{\vartheta\beta}{2z}\right)^{\frac{4m+1}{2}}}+\frac{1}{\left(1+i\frac{\vartheta\beta}{2z}\right)^{\frac{4m+1}{2}}}\right)$$
$$R'_m = \frac{1^{2m+1|2}}{2^{2m+1|2}}\left(\frac{\beta}{2z}\right)^{2m+1}\left(\frac{1}{\left(1-i\frac{\vartheta'\beta}{2z}\right)^{\frac{4m+3}{2}}}-\frac{1}{\left(1+i\frac{\vartheta'\beta}{2z}\right)^{\frac{4m+3}{2}}}\right)$$

gesetzt wurde, und ϑ und ϑ' positive echte Brüche vorstellen.

Führt man diese Reihen oben in (6.) ein und integrirt nach der Formel

$$\int_0^\infty e^{-\beta}\beta^{q-\frac{1}{2}}d\beta = \Gamma(q+\tfrac{1}{2}) = \frac{1^{q|2}}{2^q}\cdot\sqrt{\pi}\,,$$

so erhält man

$$(8.)\begin{cases}J^0_{(z)} = \sqrt{\dfrac{2}{\pi z}}\cos(z-\tfrac{1}{4}\pi)\,.\displaystyle\sum_{p=0}^{p=m-1}(-1)^p\cdot\frac{(1^{2p|2})^2}{8^{2p|8}}\cdot\frac{1}{z^{2p}}+(-1)^m S_m\\[2ex] \quad+\sqrt{\dfrac{2}{\pi z}}\cdot\sin(z-\tfrac{1}{4}\pi)\,.\displaystyle\sum_{p=0}^{p=m-1}(-1)^p\cdot\frac{(1^{2p+1|2})^2}{8^{2p+1|8}}\cdot\frac{1}{z^{2p+1}}+(-1)^m S'_m\,.\end{cases}$$

Darin ist

$$S_m = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\cos(z-\frac{1}{4}\pi)}{\sqrt{2z}}\int_0^\infty e^{-\beta}\beta^{-\frac{1}{2}}R_m\,d\beta\,,$$

$$S'_m = -\frac{i}{\pi} \cdot \frac{\sin(z-\frac{1}{4}\pi)}{\sqrt{2z}} \int_0^\infty e^{-\beta}\, \beta^{-\frac{1}{2}}\, R'_m\, d\beta\,.$$

Setzt man nun

$$1 + i\frac{\vartheta\beta}{2z} = \varrho\, e^{\frac{2}{4m+1}\gamma i} \quad \text{und} \quad 1 - i\frac{\vartheta\beta}{2z} = \varrho\, e^{-\frac{2}{4m+1}\gamma i}$$

und ebenso

$$1 + i\frac{\vartheta'\beta}{2z} = \varrho'\, e^{\frac{2}{4m+3}\gamma' i} \quad \text{und} \quad 1 - i\frac{\vartheta'\beta}{2z} = \varrho'\, e^{-\frac{2}{4m+3}\gamma' i},$$

so dass

$$\varrho^2 = 1 + \left(\frac{\vartheta\beta}{2z}\right)^2 \qquad tg\, \frac{2}{4m+1}\gamma = \frac{\vartheta\beta}{2z}\,,$$

$$\varrho'^2 = 1 + \left(\frac{\vartheta'\beta}{2z}\right)^2 \qquad tg\, \frac{2}{4m+3}\gamma' = \frac{\vartheta'\beta}{2z}$$

wird, so lassen sich obige Ausdrücke in folgende Form bringen:

$$S_m = \sqrt{\frac{2}{z}} \cdot \frac{\cos(z-\frac{1}{4}\pi)}{\pi} \cdot \frac{1^{2m|2}}{2^{2m|2}} \left(\frac{1}{4z}\right)^{2m} \int_0^\infty \frac{e^{-\beta}\, \beta^{2m-\frac{1}{2}} \cos\gamma\,.\, d\beta}{\left(1 + \left(\frac{\vartheta\beta}{2z}\right)^2\right)^{\frac{4m+1}{4}}}\,,$$

$$S'_m = \sqrt{\frac{2}{z}} \cdot \frac{\sin(z-\frac{1}{4}\pi)}{\pi} \cdot \frac{1^{2m+1|2}}{2^{2m+1|2}} \left(\frac{1}{4z}\right)^{2m+1} \int_0^\infty \frac{e^{-\beta}\, \beta^{2m+\frac{1}{2}} \sin\gamma'\, d\beta}{\left(1 + \left(\frac{\vartheta'\beta}{2z}\right)^2\right)^{\frac{4m+3}{4}}}\,.$$

Die absoluten Werthe der hier auftretenden Integrale werden grösser, wenn man im Zähler $\cos\gamma$ und $\sin\gamma'$ durch die Einheit ersetzt und im Nenner die positiven Summanden $\left(\frac{\vartheta\beta}{2z}\right)^2$ und $\left(\frac{\vartheta'\beta}{2z}\right)^2$ unterdrückt. Alsdann lassen sich die Integrationen ausführen und S_m und S'_m verwandeln sich resp. in die $(m+1)^{\text{ten}}$ Glieder der Reihen, welche zur Rechten in Gleichung (8.) stehen. Daraus folgt, dass diese Reihen, welche keine andern sind als die in Gleichung (2. b.) vorkommenden, die Eigenschaft haben, dass der Unterschied zwischen der Summe der angewandten Glieder und dem wahren Werthe der Function stets kleiner ist als das zuletzt in Rechnung gezogene Glied.

Ueberhaupt werden alle in den Formeln (2.) und (3.) enthaltenen Reihen genau auf demselben Wege durch Entwickelung des Integrals

$$J_{(z)}^{m} = \frac{2^m}{1^{2m|2}} \cdot \frac{1}{\pi\sqrt{2z}} \left\{ \begin{aligned} &\cos\left(z - \frac{2m+1}{4}\pi\right) \int_0^\infty e^{-\beta} \beta^{\frac{2m-1}{2}} \left[\left(1 - \frac{i\beta}{2z}\right)^{\frac{2m-1}{2}} \right. \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \left. + \left(1 + \frac{i\beta}{2z}\right)^{\frac{2m-1}{2}}\right] d\beta \\ -&i\sin\left(z - \frac{2m+1}{1}\pi\right) \int_0^\infty e^{-\beta} \beta^{\frac{2m-1}{2}} \left[\left(1 - \frac{i\beta}{2z}\right)^{\frac{2m-1}{2}} \right. \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \left. - \left(1 + \frac{i\beta}{2z}\right)^{\frac{2m-1}{2}}\right] d\beta \end{aligned} \right.$$

erhalten, und somit kann auch für sie die obige Eigenschaft als erwiesen betrachtet werden.

Nichts hindert, dasselbe Verfahren auch auf beliebig gebrochene Werthe des Index auszudehnen, und es leuchtet von selbst ein, dass man zu analogen Resultaten gelangen würde. Statt diese Entwickelungen zu machen, ziehen wir es jedoch vor, zu unserer Formel (1.), welche alle diese Resultate in grösster Allgemeinheit umfasst und deren Brauchbarkeit jetzt ausser allen Zweifel gesetzt ist, zurückzukehren; es wird nur noch nöthig sein, derselben auch für jedes gebrochene ν eine für den Gebrauch bequeme Gestalt zu geben.

Zuerst sei $\nu = 2n + \varepsilon$, wo ε einen echten zwischen $-\frac{1}{2}$ und $+\frac{1}{2}$ enthaltenen Bruch vorstellt; dann ist gemäss (1.):

$$J^{2n+\varepsilon} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi z}} \left\{ (-i)^{\varepsilon+\frac{1}{2}} e^{zi} (P' + Q'i) + i^{\varepsilon+\frac{1}{2}} e^{-zi} (P' - Q'i) \right\}$$

oder

$$J^{2n+\varepsilon} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi z}} \left\{ e^{i\left(z - \frac{2\varepsilon+1}{4}\pi\right)} (P' + Q'i) + e^{-i\left(z - \frac{2\varepsilon+1}{4}\pi\right)} (P' - Q'i) \right\}$$

oder endlich

$$(9.) \quad J^{2n+\varepsilon} = (-1)^n \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{ P' \cos\left(z - \frac{2\varepsilon+1}{4}\pi\right) - Q' \sin\left(z - \frac{2\varepsilon+1}{4}\pi\right) \right\}.$$

worin

$$(9.\text{a.}) \quad \left\{ \begin{aligned} P' &= \sum (-1)^p \cdot \frac{(4n+2\varepsilon+1)^{2p|2} (4n+2\varepsilon-1)^{2p|-2}}{8^{2p|8}} \cdot \frac{1}{z^{2p}} \\ Q' &= \sum (-1)^p \cdot \frac{(4n+2\varepsilon+1)^{2p+1|2} (4n+2\varepsilon-1)^{2p+1|-2}}{8^{2p+1|8}} \cdot \frac{1}{z^{2p+1}}. \end{aligned} \right.$$

Ebenso erhält man für $\nu = 2n + 1 + \varepsilon$, wo ε dieselbe Bedeutung hat wie oben

$$(10.)\quad J^{2n+1+\varepsilon} = (-1)^n \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{P'' \sin\left(z - \frac{2\varepsilon+1}{4}\pi\right) + Q'' \cos\left(z - \frac{2\varepsilon+1}{4}\pi\right)\right\}$$

und darin ist

$$(10.\,a.)\quad \begin{cases} P'' = \sum (-1)^p \cdot \dfrac{(4n+2\varepsilon+3)^{2p|2}(4n+2\varepsilon+1)^{2p|-2}}{8^{2p|8}} \cdot \dfrac{1}{z^{2p}} \\ Q'' = \sum (-1)^p \cdot \dfrac{(4n+2\varepsilon+3)^{2p+1|2}(4n+2\varepsilon+1)^{2p+1|-2}}{8^{2p+1|8}} \cdot \dfrac{1}{z^{2p+1}}. \end{cases}$$

Die Formeln (9.) und (10.), welche die Formeln (2.) und (3.) als specielle Fälle enthalten, erweisen sich als äusserst vortheilhaft bei der numerischen Berechnung von $J^{\nu}_{(z)}$. Die Reihen des §. 5., obgleich convergent für jedes z, werden bei grösseren Werthen von z sehr unbequem. Aber gerade für solche grössere z werden die jetzigen Entwickelungen brauchbar, und liefern die Werthe der Function um so genauer und um so rascher, je grösser z wird.

Die Gleichungen (9.) und (10.) können auch zur Auflösung der transscendenten Gleichungen

$$J^{2n+\varepsilon}_{(z)} = 0 \qquad \text{und } J^{2n+1+\varepsilon}_{(z)} = 0$$

benutzt werden. Aus jener findet man

$$cotg\left(z - \frac{2\varepsilon+1}{4}\pi\right) = \frac{Q'}{P'},$$

aus dieser

$$tg\left(z - \frac{2\varepsilon+1}{4}\pi\right) = -\frac{Q''}{P''}.$$

Die Wurzelwerthe der ersteren ergeben sich demnach aus der Gleichung

$$z - \frac{2\varepsilon+1}{4}\pi = \frac{2m+1}{2}\pi - arc\ tg\ \frac{Q'}{P'}$$

und die der letzteren aus

$$z - \frac{2\varepsilon+1}{4}\pi = m\pi - arc\ tg\ \frac{Q''}{P''}.$$

Daraus lassen sich die Wurzelwerthe, welche in unbegrenzter Anzahl vorhanden sind, für einigermassen grosse z durch Annäherung berechnen, und zwar mit um so grösserer Genauigkeit, je grösser m und darum auch z ist. Man bemerkt leicht, dass die Differenz zweier aufeinanderfolgenden Wurzeln, für ein und dieselbe Function, sich um so mehr der Grenze π nähert, je mehr z wächst, und dass die Differenz der gleichvielten Wurzeln zweier Functionen, deren Indices verschieden sind, sich bei wachsendem z der Grenze $\frac{1}{2}\pi$ nähert.

Die nämlichen Resultate ergeben sich auch mit Leichtigkeit aus folgender Bemerkung. Für sehr grosse Werthe von z nähert sich die Reihe Q der Null, während P sich auf das erste Glied 1 zurückzieht. Man hat daher für sehr grosse Werthe von z nahezu:

$$\text{(11.)} \quad \begin{cases} J_{(z)}^{2n+\varepsilon} = (-1)^n \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{2\varepsilon+1}{4}\pi\right) \\ J_{(z)}^{2n+1+\varepsilon} = (-1)^n \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin\left(z - \frac{2\varepsilon+1}{4}\pi\right), \end{cases}$$

woraus das oben Behauptete sofort evident ist.

Addirt man die Quadrate dieser beiden Gleichungen, so ergibt sich, ebenfalls nur für äusserst grosse Werthe von z, die bemerkenswerthe Relation:

$$\text{(12.)} \quad (J_{(z)}^{\nu})^2 + (J_{(z)}^{\nu+1})^2 \doteq \frac{2}{\pi z},$$

d. h. die Summe der Quadrate zweier Bessel'schen Functionen, deren Indices um 1 verschieden sind, nähert sich bei wachsendem z dem Quotienten $\frac{2}{\pi z}$.

§. 18. Ueber die Wurzelwerthe der Gleichung $J_{(z)}^{\nu} = 0$.

Durch die Betrachtungen des vorigen Paragraphen erfuhren wir, dass die Gleichung $J_{(z)}^{\nu} = 0$ unendlich viele Wurzelwerthe besitzt. Da jedoch dieses Resultat mit Benützung divergenter Reihen erlangt wurde, so dürfte es angemessen sein, dasselbe hier nochmals mit aller Strenge nachzuweisen, indem wir zeigen, dass die Function $J_{(z)}^{\nu}$, wenn ihr Argument um 2π wächst, zweimal verschwindet, und dabei jedesmal ihr Vorzeichen wechselt. Wir betreten, um zu diesem Ziele zu gelangen, den von Bessel*) vorgezeichneten Weg.

Wir nehmen zunächst an, ν sei $< \frac{1}{2}$ und $> -\frac{1}{2}$, demnach $\nu - \frac{1}{2}$ negativ echt gebrochen $= -\mu$. Dann ist

$$J_{(z)}^{\nu} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{z^{\nu}}{2^{\nu}\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} \int_0^1 \frac{\cos(zu)\,.\,du}{(1-u^2)^{\mu}}.$$

*) Bessel, Untersuchung des Theils der planetarischen Störungen, welcher aus der Bewegung der Sonne entsteht. Abh. der Berl. Akad. der Wiss. 1824. S. 39.

Setzt man nun $z = \frac{2m+m'}{2}\pi$, wo m eine ganze Zahl und m' einen echten Bruch bedeutet, so wird das vorstehende Integral

$$\int_0^1 \frac{\cos(zu) \, . \, du}{(1-u^2)^\mu} = \int_0^1 \cos \frac{2m+m'}{2} \pi u \cdot \frac{du}{(1-u^2)^\mu},$$

oder, wenn man v statt $(2m+m')u$ schreibt,

$$= \int_0^{2m+m'} \cos \frac{\pi}{2} v \cdot \frac{dv}{((2m+m')^2 - v^2)^\mu}.$$

Wird dieses Integral von $v = a$ bis $v = b$ genommen, und gleichzeitig $h + w$ statt v gesetzt, so hat man

$$\int_a^b \cos \frac{\pi}{2} v \cdot \frac{dv}{((2m+m')^2 - v^2)^\mu} = \int_{a-h}^{b-h} \cos\left(\frac{\pi}{2} h + \frac{\pi}{2} w\right) \frac{dw}{((2m+m')^2 - (h+w)^2)^\mu}.$$

Darin nun nehmen wir nach und nach $h = 1, 3, 5, \ldots, 2m-1$ und gleichzeitig immer $a = h-1$ und $b = h+1$, und erhalten, wenn zur Abkürzung $2m+m' = \lambda$ gesetzt wird:

$$J^\nu\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)^\nu}{2^\nu \, \Gamma(\nu+\frac{1}{2})} \int_{-1}^{+1} \sin \frac{\pi}{2} w \, . \, dw \left\{ \frac{-1}{(\lambda^2 - (1+w)^2)^\mu} + \frac{1}{(\lambda^2 - (3+w)^2)^\mu} + \cdots \right.$$
$$\left. + \frac{(-1)^{m-1}}{(\lambda^2 - (2m-3+w)^2)^\mu} + \frac{(-1)^m}{(\lambda^2 - (2m-1+w)^2)^\mu} \right\}$$
$$+ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{(-1)^m \left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)^\nu}{2^\nu \, \Gamma(\nu+\frac{1}{2})} \int_0^{m'} \frac{\cos \frac{\pi}{2} w \, . \, dw}{(\lambda^2 - (2m+w)^2)^\mu}.$$

Die einzelnen Glieder dieses Ausdrucks sind positiv, das letzte schon darum, weil $\frac{\pi}{2} w$ stets kleiner bleibt als $\frac{\pi}{2}$, die übrigen, weil ihr positiver Theil grösser ist als der negative; denn man hat

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\sin \frac{\pi}{2} w \, . \, dw}{(\lambda^2 - (h+w)^2)^\mu} = \int_0^1 \sin \frac{\pi}{2} w \, . \, dw \left\{ \frac{1}{(\lambda^2 - (h+w)^2)^\mu} - \frac{1}{(\lambda^2 - (h-w)^2)^\mu} \right\},$$

wo der Nenner des positiven Theils stets kleiner ist als der des negativen. Ferner ist jedes folgende Glied grösser als das vorhergehende, wegen der immer abnehmenden Nenner; demnach hat die Summe zweier aufeinanderfolgenden das Zeichen des letzten

derselben. Ist nun m gerade, so ist das letzte Glied in der Klammer positiv und daher die Summe aller Glieder positiv; ist dagegen m ungerade, so ist das letzte Glied innerhalb der Klammer negativ und demnach die Summe aller Glieder vom zweiten an negativ, und das erste Glied sowie das Glied ausserhalb der Klammer sind ebenfalls negativ. Wir können daher aussprechen, dass $J^{\nu}_{(z)}$, wenn ν zwischen $-\frac{1}{2}$ und $+\frac{1}{2}$ liegt, von $z = m\pi$ bis $z = (m + \frac{1}{2})\pi$ immer positiv ist, wenn m eine gerade Zahl, und negativ, wenn m ungerade ist.

Aehnliche Eigenschaften besitzt übrigens die Function $J^{\nu}_{(z)}$ auch dann, wenn der Index ν beliebig reell ist. Denn man hat

$$\frac{\partial \left(z^{-\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial z} = - \tfrac{1}{2} z^{-\frac{\nu+1}{2}} J^{\nu+1}_{(\sqrt{z})} \,.$$

Diese Gleichung zeigt, dass $J^{\nu+1}_{(\sqrt{z})}$ verschwindet, wenn $z^{-\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{z})}$ ein Maximum oder Minimum ist; zwischen zwei Werthen von z oder $\sqrt{z}$, für welche $z^{-\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{z})}$ verschwindet, liegt aber nothwendig ein Maximum oder Minimum, demnach auch ein Nullwerth von $J^{\nu+1}_{(\sqrt{z})}$. Es geht daraus hervor, dass $J^{\nu+1}_{(z)}$ ebenso oft verschwindet, als $J^{\nu}_{(z)}$ Maximum oder Minimum wird; ebenso muss zwischen zwei Werthen von z, für welche $J^{\nu+1}_{(z)}$ Null wird, ein Maximum oder Minimum von $z^{-\frac{\nu+1}{2}} J^{\nu+1}_{(\sqrt{z})}$, folglich ein verschwindendes $J^{\nu+2}_{(z)}$ liegen, u. s. f.

Für die negativen Werthe von ν unter $-\frac{1}{2}$ würde sich eine analoge Reihe von Schlussfolgerungen an die Gleichung

$$\frac{\partial \left(z^{\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial z} = \tfrac{1}{2} z^{\frac{\nu-1}{2}} J^{\nu-1}_{(\sqrt{z})}$$

anknüpfen lassen.

Um ferner nachzuweisen, dass die Gleichung $J^{\nu}_{(z)} = 0$ keine imaginären Wurzelwerthe besitzt*), erinnern wir uns an folgenden Satz aus der Theorie der algebraischen Gleichungen: Schreibt man die algebraische Gleichung $Z = 0$ nebst den durch Differentiation aus ihr abgeleiteten der Reihe nach an wie folgt:

*) Fourier, Théorie analytique de la chaleur. S. 372.

$$Z = 0 \;, \quad \frac{\partial Z}{\partial z} = 0 \;, \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = 0 \;, \quad \frac{\partial^3 Z}{\partial z^3} = 0 \;, \; \ldots$$

und nimmt an, dass jede reelle Wurzel irgend einer dieser Gleichungen in die vorausgehende und in die nachfolgende substituirt Resultate von entgegengesetzten Zeichen hervorbringt, so ist gewiss, dass sowohl die vorgelegte Gleichung $Z = 0$, als auch sämmtliche daraus abgeleitete $\frac{\partial Z}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = 0$, $\frac{\partial^3 Z}{\partial z^3} = 0$, u. s. w., nur reelle Wurzelwerthe besitzen.

Wir betrachten nun die Gleichung $z^{-\frac{\nu}{2}} \overset{\nu}{J}(\sqrt{z}) = 0$ als eine algebraische Gleichung von unendlich hohem Grade; ihre successiven Ableitungen haben, dem Grundgesetze III. zufolge, alle die nämliche Form wie die ursprüngliche Gleichung, nur ist in jeder folgenden der Index um 1 grösser als in der vorhergehenden. Drei beliebige in der Reihe aufeinander folgende dieser Gleichungen würden z. B. lauten:

$$\ldots \; z^{-\frac{\nu+m}{2}} \overset{\nu+m}{J}(\sqrt{z}) = 0 \;, \; z^{-\frac{\nu+m+1}{2}} \overset{\nu+m+1}{J}(\sqrt{z}) = 0 \;, \; z^{-\frac{\nu+m+2}{2}} \overset{\nu+m+2}{J}(\sqrt{z}) = 0 \;, \; \ldots$$

Zwischen diesen drei Functionen besteht aber, vermöge der Grundformel (II.) die Beziehung

$$z \,.\, z^{-\frac{\nu+m+2}{2}} \overset{\nu+m+2}{J}(\sqrt{z}) = 2(\nu+m+1)\, z^{-\frac{\nu+m+1}{2}} \overset{\nu+m+1}{J}(\sqrt{z}) - z^{-\frac{\nu+m}{2}} \overset{\nu+m}{J}(\sqrt{z}) \,,$$

welche zeigt, dass für einen positiven Werth von z, der $\overset{\nu+m+1}{J}_{(\sqrt{z})}$ zu Null macht, $\overset{\nu+m}{J}_{(\sqrt{z})}$ und $\overset{\nu+m+2}{J}_{(\sqrt{z})}$ entgegengesetzte Zeichen annehmen. Was die negativen Werthe von z anlangt, so erhellt aus der Gleichung (VIII. §. 6.)

$$z^{-\frac{\nu}{2}} \overset{\nu}{J}_{(\sqrt{z})} = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} \left\{ 1 - \frac{z}{2(2\nu+2)} + \frac{z^2}{2.4(2\nu+2)(2\nu+4)} - + \cdots \right\},$$

dass keiner derselben die Function $z^{-\frac{\nu}{2}} \overset{\nu}{J}(\sqrt{z})$ noch irgend eine ihrer Ableitungen zum Verschwinden bringt, weil für ein negatives z alle Glieder dieser Reihe das nämliche Vorzeichen erhalten.

Wir sind demnach überzeugt, dass die Gleichung $z^{-\frac{\nu}{2}} \overset{\nu}{J}(\sqrt{z}) = 0$ nur reelle positive, und demnach die Gleichung $\overset{\nu}{J}_{(z)} = 0$ nur reelle Wurzelwerthe haben kann, und zwar zu jedem positiven einen gleichgrossen negativen.

§. 19. Der Fourier'sche Lehrsatz.

Bezeichnet man die positiven Wurzelwerthe der Gleichung $z^{-m}.J^{m}_{(z)} = 0$ ihrer Grösse nach geordnet mit $\vartheta_0, \vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_p, \ldots$, so kann jede innerhalb der Grenzen 0 bis 1 beliebig gegebene Function $f(x)$ in eine nach $(\vartheta_p x)^{-m} J^m(\vartheta_p x)$ fortschreitende Reihe entwickelt werden.

Dem Nachweise dieses Lehrsatzes sei der gegenwärtige Paragraph gewidmet. Für den speciellen Fall $m = 0$ wurde derselbe bereits von Fourier*) aufgestellt, und darum halte ich es für zweckmässig, auch das obige allgemeinere Theorem nach Fourier zu benennen.

Wir gehen aus von folgender Entwickelung

$$\varphi(x) = a_0(\zeta_0 x)^{-\frac{m}{2}} J^m(\sqrt{\zeta_0 x}) + a_1(\zeta_1 x)^{-\frac{m}{2}} J^m(\sqrt{\zeta_1 x}) + a_2(\zeta_2 x)^{-\frac{m}{2}} J^m(\sqrt{\zeta_2 x}) + \cdots$$

oder

$$\varphi(x) = \sum a_p (\zeta_p x)^{-\frac{m}{2}} J^m(\sqrt{\zeta_p x}),$$

in welcher ζ_p einen der Wurzelwerthe der Gleichung $z^{-\frac{m}{2}} J^m(\sqrt{z}) = 0$ vorstellt, und demnach mit ϑ_p^2 identisch ist. Es handelt sich jetzt darum, die Coefficienten $a_0, a_1, a_2, \ldots$ zu bestimmen. Um irgend einen dieser Coefficienten, z. B. a_n, zu erhalten, multipliciren wir beiderseits mit $\psi_n\,dx$, wo ψ_n eine Function von x ist, und integriren von $x = 0$ bis $x = 1$. Wir bestimmen sodann die Function ψ_n derart, dass nach vollendeter Integration die rechte Seite der Gleichung sich auf das mit a_n behaftete Glied zurückzieht, alle andern Glieder aber den Werth Null annehmen.

Bezeichnen wir die Function $(\zeta x)^{-\frac{m}{2}} J^m(\sqrt{\zeta x})$ zur Abkürzung mit y, so ist jedes Glied der rechten Seite ein bestimmtes Integral von der Form

$$a \int_0^1 \psi\, y\, dx.$$

Die Function y genügt (siehe III. Abschn.) der Differentialgleichung

---

*) Fourier, Théorie analytique de la chaleur. Chap. VI. S. 386.

$$x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + (m+1)\frac{\partial y}{\partial x} + \tfrac{1}{4}\zeta y = 0;$$

demnach ist

$$\int \psi y\, dx = -\frac{4}{\zeta}\int\left((m+1)\psi\frac{\partial y}{\partial x} + \psi x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)dx\,.$$

Indem man die hier zur Rechten vorkommenden Integrale der theilweisen Integration unterwirft, erhält man:

$$(m+1)\int\psi\frac{\partial y}{\partial x}dx = C + (m+1)\psi y - (m+1)\int y\frac{\partial\psi}{\partial x}dx\,,$$

$$\int\psi x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\cdot dx = D + \psi x\cdot\frac{\partial y}{\partial x} - y\frac{\partial(\psi x)}{\partial x} + \int y\cdot\frac{\partial^2(\psi x)}{\partial x^2}\cdot dx\,,$$

wo C und D willkührliche Constante sind. Nimmt man diese Integrale zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = x$, so lauten sie

$$(m+1)\int_0^x\psi\frac{\partial y}{\partial x}dx = (m+1)\Big[\psi y\Big]_0^x - (m+1)\int_0^x y\frac{\partial\psi}{\partial x}dx\,,$$

$$\int_0^x\psi x\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\cdot dx = \left[\psi x\frac{\partial y}{\partial x} - y\frac{\partial(\psi x)}{\partial x}\right]_0^x + \int_0^x y\cdot\frac{\partial^2(\psi x)}{\partial x^2}\cdot dx\,,$$

wo die Bezeichnung $\Big[\cdots\Big]_0^x$ wohl ohne nähere Erläuterung verständlich ist. Man hat demnach:

$$-\frac{\zeta}{4}\int_0^x\psi y\,.\,dx = \int_0^x\left(y\cdot\frac{\partial^2(\psi x)}{\partial x^2} - (m+1)\,y\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)dx$$

$$+\left[\psi x\frac{\partial y}{\partial x} - y\frac{\partial(\psi x)}{\partial x} + (m+1)\psi y\right]_0^x.$$

Bestimmt man nun die Function ψ aus der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2(\psi x)}{\partial x^2} - (m+1)\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x} + \tfrac{1}{4}\zeta'\psi = 0\,,$$

wo ζ' eine constante Grösse bedeutet, so kann man das Integral zur Rechten mit dem zur Linken zusammenfassen, und erhält:

$$\frac{\zeta'-\zeta}{4}\int_0^x\psi y\,dx = \left[\psi x\frac{\partial y}{\partial x} - y\cdot\frac{\partial(\psi x)}{\partial x} + (m+1)\psi y\right]_0^x.$$

Die obige Differentialgleichung nimmt aber, wenn man $\frac{\partial^2(\psi x)}{\partial x^2}$ entwickelt, folgende Gestalt an:

$$x\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + (1-m)\frac{\partial\psi}{\partial x} + \tfrac{1}{4}\zeta'\psi = 0$$

und man erkennt durch Vergleichung mit der oben für y angegebenen Differentialgleichung, dass ihr

$$\psi = (\zeta' x)^{\frac{m}{2}} J^{-m}(\sqrt{\zeta' x})$$

oder, weil für jedes ganze m

$$J^{-m}_{(z)} = (-1)^m J^m_{(z)}$$

ist, auch

$$\psi = (\zeta' x)^{\frac{m}{2}} J^m(\sqrt{\zeta' x})$$

genügt. Führt man diesen Werth in das obige Integral ein, und berücksichtigt dabei, dass

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial\left((\zeta x)^{-\frac{m}{2}} J^m(\sqrt{\zeta x})\right)}{\partial x} = -\frac{\zeta}{2}(\zeta x)^{-\frac{m+1}{2}} J^{m+1}(\sqrt{\zeta x})$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial\left((\zeta' x)^{\frac{m}{2}} J^m(\sqrt{\zeta' x})\right)}{\partial x} = \frac{\zeta'}{2}(\zeta' x)^{\frac{m-1}{2}} J^{m-1}(\sqrt{\zeta' x})$$

ist, so wird dasselbe, wenn man die Grenzen einführt, und bedenkt, dass der eingeklammerte Ausdruck zur Rechten für $x = 0$ verschwindet:

$$\frac{\zeta' - \zeta}{4}\int_0^x J^m(\sqrt{\zeta x}) \,.\, J^m(\sqrt{\zeta' x}) \,.\, dx$$

$$= -\tfrac{1}{2}\sqrt{\zeta x} \,.\, J^m(\sqrt{\zeta' x}) \,.\, J^{m+1}(\sqrt{\zeta x}) - \tfrac{1}{2}\sqrt{\zeta' x} \,.\, J^m(\sqrt{\zeta x})\, J^{m-1}(\sqrt{\zeta' x})$$

$$+ m J^m(\sqrt{\zeta x}) \,.\, J^m(\sqrt{\zeta' x}) \,.$$

Nimmt man nun $x = 1$ als obere Grenze und versteht unter ζ und ζ' Wurzeln der Gleichung $z^{-\frac{m}{2}} J^m_{(\sqrt{z})} = 0$, so hat man

$$(1.) \qquad \int_0^1 J^m(\sqrt{\zeta x}) \,.\, J^m(\sqrt{\zeta' x}) \,.\, dx = 0 \,.$$

Diese Formel gilt jedoch nur so lange, als ζ' von ζ verschieden ist; wenn $\zeta' = \zeta$ gesetzt, ergibt sich der Werth des Integrals unter der Form $\frac{0}{0}$ und wird nach bekannten Regeln bestimmt.

In der Gleichung

$$\int_0^x J^m(\sqrt{\zeta x}) \,.\, J^m(\sqrt{\zeta' x}) \,.\, dx$$

$$= \frac{-2\sqrt{\zeta x} \,.\, J^m(\sqrt{\zeta' x})\, J^{m+1}(\sqrt{\zeta x}) - 2\sqrt{\zeta' x} \,.\, J^m(\sqrt{\zeta x})\, J^{m-1}(\sqrt{\zeta' x}) + 4m J^m(\sqrt{\zeta x})\, J^m(\sqrt{\zeta' x})}{\zeta' - \zeta}$$

differentiiren wir nämlich zur Rechten Zähler und Nenner nach ζ' und erhalten dadurch den Ausdruck

$$x J^m(\sqrt{\zeta x})\, J^m(\sqrt{\zeta' x}) - m\sqrt{\frac{x}{\zeta'}} \cdot J^{m+1}(\sqrt{\zeta x}) \,.\, J^m(\sqrt{\zeta' x})$$

$$- m\sqrt{\frac{x}{\zeta'}} \cdot J^m(\sqrt{\zeta x})\, J^{m+1}(\sqrt{\zeta' x}) + x\sqrt{\frac{\zeta}{\zeta'}} \cdot J^{m+1}(\sqrt{\zeta x}) \,.\, J^{m+1}(\sqrt{\zeta' x}),$$

welcher für $x = 1$ und $\zeta' = \zeta$ in $\left(J^{m+1}(\sqrt{\zeta})\right)^2$ übergeht. Wir haben demnach, wenn $\zeta' = \zeta$ ist:

$$(2.)\qquad \int_0^1 \left(J^m(\sqrt{\zeta x})\right)^2 dx = \left(J^{m+1}(\sqrt{\zeta})\right)^2.$$

Die beiden in den Gleichungen (1.) und (2.) ausgesprochenen Sätze, welche an und für sich schon interessant genug sind, können jetzt dazu dienen, in der obigen Entwickelung von $\varphi(x)$ die Coefficienten zu bestimmen. Um a_n zu finden, multipliciren wir die Gleichung

$$\varphi(x) = \sum a_p \,(\zeta_p x)^{-\frac{m}{2}} J^m(\sqrt{\zeta_p x})$$

auf beiden Seiten mit

$$\psi_n = (\zeta_n x)^{+\frac{m}{2}} J^m(\sqrt{\zeta_n x})$$

und integriren von $x = 0$ bis $x = 1$. Zur Rechten verschwinden dann alle Glieder, mit Ausnahme desjenigen, welches den Coefficienten a_n hat; wir erhalten daher zur Bestimmung desselben die Gleichung

$$\int_0^1 \varphi(x) \,.\, (\zeta_n x)^{\frac{m}{2}} J^m(\sqrt{\zeta_n x}) \,.\, dx = a_n \int_0^1 \left(J^m(\sqrt{\zeta_n x})\right)^2 dx,$$

woraus vermöge Gleichung (2.)

$$a_n = \frac{1}{\left(J^{m+1}(\sqrt{\zeta_n})\right)^2} \int_0^1 \varphi(x) \,.\, (\zeta_n x)^{\frac{m}{2}} J^m(\sqrt{\zeta_n x}) \,.\, dx$$

folgt.

Um daraus nun das Eingangs ausgesprochene Theorem zu erhalten, braucht man nur x^2 statt x, $f(x)$ statt $\varphi(x^2)$, ϑ_p statt $\sqrt{\zeta_p}$ zu schreiben, und erhält sogleich

$$f(x) = a_0(\vartheta_0 x)^{-m} J^m(\vartheta_0 x) + a_1(\vartheta_1 x)^{-m} J^m(\vartheta_1 x) + a_1(\vartheta_2 x)^{-m} J^m(\vartheta_2 x) + \cdots$$

oder

(3.) $$f(x) = \sum a_p (\vartheta_p x)^{-m} J^m (\vartheta_p x),$$
worin
(4.) $$a_p = \frac{2}{(J^{m+1}(\vartheta_p))^2} \int_0^1 x f(x) (\vartheta_p x)^m J^m (\vartheta_p x) \, . \, dx$$
ist. Für $m = 0$ erhält man daraus

$$\begin{cases} (3.\text{a.}) & f(x) = \sum a_p J^0 (\vartheta_p x), \\ (4.\text{a.}) & a_p = \dfrac{2}{(J^1(\vartheta_p))^2} \displaystyle\int_0^1 x f(x) \, . \, J^0(\vartheta_p x) \, . \, dx, \end{cases}$$

d. i. den von Fourier am oben angeführten Orte bereits nachgewiesenen Lehrsatz.

§. 20. Der Schlömilch'sche Lehrsatz.

Mit dem Fourier'schen Lehrsatz nahe verwandt ist ein von Schlömilch in der oben bereits citirten Abhandlung*) aufgestelltes Theorem, welches ebenfalls von der Entwickelung einer beliebigen Function in eine nach Bessel'schen Functionen von gleichem Index fortschreitende Reihe handelt. Wir können uns nicht versagen, diesen interessanten Satz in erweiterter Gestalt, übrigens jedoch in getreuem Anschluss an das Original, als neues Beispiel von der Mannigfaltigkeit der Eigenschaften der Bessel'schen Functionen, hier vorzuführen.

Gehen wir nämlich aus von der bekannten Fourier'schen Reihe,
$$F(z) = \tfrac{1}{2} A_0 + A_1 \cos \frac{\pi z}{h} + A_2 \cos \frac{2\pi z}{h} + \cdots,$$
wo
$$A_n = \frac{2}{h} \int_0^h F(u) \, . \, \cos \frac{n\pi u}{h} \, du$$
ist, und welche gilt für $h \geqq z \geqq 0$, setzen darin $h = \pi$, $z = vx$ und multipliciren die jetzt für $\pi \geqq vx \geqq 0$ giltige Gleichung

$$\begin{cases} F(vx) = \tfrac{1}{2} A_0 + A_1 \cos vx + A_2 \cos (2vx) + \cdots \\ A_n = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^\pi F(u) \cos nu \, du \end{cases}$$

*) Schlömilch, Zeitschrift für Math. u. Phys. II. Jahrgang. S. 155.

beiderseits mit

$$\frac{2}{\pi} \cdot \frac{dv}{\sqrt{1-v^2}}$$

und integriren sodann zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = 1$, so erhalten wir

$$(1.) \quad \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{F(vx)}{\sqrt{1-v^2}} \cdot dv = \tfrac{1}{2}A_0 + A_1 J^0(x) + A_2 J^0(2x) + A_3 J^0(3x) + \cdots$$

Da v die Einheit nicht überschritten hat, gilt diese Gleichung von $x = 0$ bis $x = \pi$. Setzen wir nunmehr

$$(2.) \quad \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{F(vx)}{\sqrt{1-v^2}} \cdot dv = f(x)\,,$$

so ergibt sich durch Differentiation nach x:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{v F'(vx)}{\sqrt{1-v^2}} \cdot dv = f'(x)\,.$$

Wir schreiben jetzt in dieser Gleichung s statt v, μt statt x, multipliciren beiderseits mit $\mu \cdot \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ und integriren nach t zwischen den Grenzen $t = 0$ und $t = 1$; dadurch ergibt sich

$$\frac{2\mu}{\pi}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\int_0^1 \frac{s F'(\mu s t)}{\sqrt{1-s^2}}\, ds = \mu \int_0^1 \frac{f'(\mu t)}{\sqrt{1-t^2}} \cdot dt$$

oder nach einem bekannten Satze*):

---

*) Schlömilch hat von dem hier in Anwendung kommenden, von Abel herrührenden Satze folgenden Beweis gegeben. Durch gewöhnliche doppelte Integration findet man zunächst:

$$\int_0^\mu \int_0^{\sqrt{\mu^2-x^2}} \frac{F'(x)\,.\,dx\,dy}{\sqrt{\mu^2-x^2-y^2}} = \frac{\pi}{2}\Big[F(\mu) - F(0)\Big]\,.$$

Dieses Doppelintegral verwandelt sich durch Einführung von Polarcoordinaten ($x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$) in das folgende

$$\int_0^\mu \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{F'(r\cos\vartheta)\, r\, dr\, d\vartheta}{\sqrt{\mu^2-r^2}}$$

$$F(\mu) - F(0) = \mu \int_0^1 \frac{f'(\mu t)}{\sqrt{1-t^2}} \cdot dt\,.$$

Für $x = 0$ erhält man aus (2.) $F(0) = f(0)$, mithin ist

$$F(\mu) = f(0) + \mu \int_0^1 \frac{f'(\mu t)}{\sqrt{1-t^2}} \cdot dt\,.$$

Wir schreiben nun in Gleichung (1.) $f(x)$ statt des Integrales zur Linken, drücken zur Rechten $F(u)$, welches in A_n enthalten ist, vermittelst der vorstehenden Gleichung durch $f(u)$ aus, und gelangen dadurch zu dem Satze, dass die beliebige Function $f(x)$ unter der Bedingung $\pi \geqq x \geqq 0$ in die Reihe

$$(3.)\quad f(x) = \tfrac{1}{2} A_0 + A_1 J^0(x) + A_2 J^0(2x) + A_3 J^0(3x) + \cdots$$

entwickelt werden kann, wenn die Coefficienten A nach der Formel

$$(3.\text{a.})\qquad A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi u \cos nu\, du \int_0^1 \frac{f'(ut)}{\sqrt{1-t^2}} \cdot dt$$

bestimmt werden.

Setzen wir in Gleichung (3.) $\sqrt{x}$ statt x, so lautet dieselbe

$$f(\sqrt{x}) = \tfrac{1}{2} A_0 + \sum A_{p+1} \,.\, J^0((p+1)\sqrt{x})\,.$$

Nun ist aber (nach III.$_0$ §. 3.)

$$\frac{\partial^m J^0((p+1)\sqrt{x})}{\partial x^m} = (-\tfrac{1}{2})^m (p+1)^m \,.\, x^{-\frac{m}{2}} J^m((p+1)\sqrt{x})\,.$$

Differentiiren wir daher oben beiderseits m mal nach x, so ergibt sich:

$$\frac{\partial^m f(\sqrt{x})}{\partial x^m} = (-\tfrac{1}{2})^m \sum (p+1)^m A_{p+1} \,.\, x^{-\frac{m}{2}} J^m((p+1)\sqrt{x})$$

---

und daraus wird für $r = \mu s$ und $\cos\vartheta = t$

$$\mu \int_0^1 \int_0^1 \frac{F'(\mu s t)\, s\, ds\, dt}{\sqrt{1-s^2}\,.\sqrt{1-t^2}}\,.$$

Man hat daher

$$\mu \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \int_0^1 \frac{s\, F'(\mu s t)\,.\, ds}{\sqrt{1-s^2}} = \frac{\pi}{2} \Big[F(u) - F(0)\Big]\,,$$

d. i. die oben im Texte gebrauchte Formel.

oder, wenn man

$$\frac{\partial^m f(\sqrt{x})}{\partial x^m} = x^{-\frac{m}{2}} \varphi(\sqrt{x})$$

und

$$(-\tfrac{1}{2})^m (p+1)^m A_{p+1} = B_{p+1}$$

setzt:

$$\varphi(\sqrt{x}) = \sum B_{p+1} J^m((p+1)\sqrt{x}).$$

Setzen wir darin x^2 statt x, so erhalten wir folgenden Lehrsatz:

Die beliebige Function $\varphi(x)$ kann unter der Bedingung $\pi \geqq x \geqq 0$ in die Reihe

$$\text{(4.)} \quad \varphi(x) = B_1 J^m(x) + B_2 J^m(2x) + B_3 J^m(3x) + \cdots$$

verwandelt werden, wenn nur die Coefficienten B vermittelst der Formel

$$\text{(4.a.)} \quad B_n = (-\tfrac{1}{2})^m \cdot n^m \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^\pi u \cos nu\, du \int_0^1 \frac{f'(ut)}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

und die Function $f(u)$ aus der Gleichung

$$\text{(4.b.)} \quad \frac{\partial^m f(\sqrt{x})}{\partial x^m} = x^{-\frac{m}{2}} \varphi(\sqrt{x})$$

bestimmt werden.

Nehmen wir z. B. $m = 1$, so ist

$$\frac{\partial f(\sqrt{x})}{\partial x} = \frac{\varphi(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$$

oder, wenn darin x mit u^2 vertauscht wird

$$\frac{\partial f(u)}{\partial u} = f'(u) = 2\varphi(u).$$

Wir erhalten daher folgende, ebenfalls von Schlömilch bereits gefundene Entwickelung:

$$\varphi(x) = B_1 J^1(x) + B_2 J^1(2x) + B_3 J^1(3x) + \cdots$$

worin

$$B_n = -\frac{2n}{\pi} \int_0^\pi u \cos nu\, du \int_0^1 \frac{\varphi(ut)}{\sqrt{1-t^2}} \cdot dt$$

zu nehmen, und welche gilt für $\pi \geqq x \geqq 0$.

Zweiter Abschnitt.

Die Bessel'schen Functionen zweiter Art.

---

§. 21. Die Functionen $\mathfrak{J}^{\nu}_{(z)}$ und $\mathfrak{Y}^{\nu}_{(z)}$.

Wir gehen von der Gleichung (III. a.), nämlich von

$$\frac{\partial^m \left(z^{-\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial z^m} = (-\tfrac{1}{2})^m \cdot z^{-\frac{\nu+m}{2}} J^{\nu+m}_{(\sqrt{z})}$$

aus, differentiiren dieselbe beiderseits nach ν und erhalten

$$\frac{\partial^m}{\partial z^m}\left(\frac{\partial\left(z^{-\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial \nu}\right) = (-\tfrac{1}{2})^m \cdot \frac{\partial\left(z^{-\frac{\nu+m}{2}} J^{\nu+m}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial \nu}.$$

Nun leuchtet ein, dass $\frac{\partial\left(z^{-\frac{\nu+m}{2}} J^{\nu+m}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial \nu}$ genau in derselben Weise aus z und $\nu+m$ zusammengesetzt ist, wie $\frac{\partial\left(z^{-\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial \nu}$ aus z und ν. Setzen wir daher

$$z^{-\frac{\nu}{2}} \mathfrak{J}^{\nu}_{(\sqrt{z})} = \frac{\partial\left(z^{-\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial \nu}$$

oder, was dasselbe ist

$$(1.)\qquad z^{-\nu} \mathfrak{J}^{\nu}_{(z)} = \frac{\partial\left(z^{-\nu} J^{\nu}_{(z)}\right)}{\partial \nu},$$

so lautet obige Gleichung:

$$(2.)\qquad \frac{\partial^m \left(z^{-\frac{\nu}{2}} \mathfrak{J}^{\nu}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial z^m} = (-\tfrac{1}{2})^m \cdot z^{-\frac{\nu+m}{2}} \mathfrak{J}^{\nu+m}_{(\sqrt{z})}.$$

Wir sind also durch dieses Verfahren zu einer neuen Function $\mathfrak{J}^{\nu}_{(z)}$ gelangt, welche sich dem Grundgesetz (III.) der Bessel'schen Functionen unterwirft. Es ist klar, dass wir durch wiederholtes Differentiiren der Gleichung (III. a.) nach ν beliebig viele solche

Functionen erhalten könnten, welche mit der Function $J_{(z)}^{\nu}$ die genannte Eigenschaft theilen. Für unsere jetzigen Zwecke genügt es aber, bei der einmaligen Differentiation stehen zu bleiben.

Wenden wir dasselbe Verfahren auf die Gleichung (IV.a.), nämlich auf

$$\frac{\partial^m \left(z^{\frac{\nu}{2}} J_{(\sqrt{z})}^{\nu}\right)}{\partial z^m} = (\tfrac{1}{2})^m \cdot z^{\frac{\nu-m}{2}} J_{(\sqrt{z})}^{\nu-m}$$

an, so finden wir

$$\frac{\partial^m}{\partial z^m} \left(\frac{\partial \left(z^{\frac{\nu}{2}} J_{(\sqrt{z})}^{\nu}\right)}{\partial \nu} \right) = (\tfrac{1}{2})^m \cdot \frac{\partial \left(z^{\frac{\nu-m}{2}} J_{(\sqrt{z})}^{\nu-m}\right)}{\partial \nu},$$

d. h., wenn wir

$$z^{\frac{\nu}{2}} \mathfrak{Y}_{(\sqrt{z})}^{\nu} = \frac{\partial \left(z^{\frac{\nu}{2}} J_{(\sqrt{z})}^{\nu}\right)}{\partial \nu}$$

oder, was dasselbe ist

(3.) $$z^{\nu} \mathfrak{Y}_{(z)}^{\nu} = \frac{\partial \left(z^{\nu} J_{(z)}^{\nu}\right)}{\partial \nu}$$

setzen:

(4.) $$\frac{\partial^m \left(z^{\frac{\nu}{2}} \mathfrak{Y}_{(\sqrt{z})}^{\nu}\right)}{\partial z^m} = (\tfrac{1}{2})^m \cdot z^{\frac{\nu-m}{2}} \mathfrak{Y}_{(\sqrt{z})}^{\nu-m}.$$

Wir sind sonach zu einer zweiten Function $\mathfrak{Y}_{(z)}^{\nu}$ gelangt, welche mit der Bessel'schen Function $J_{(z)}^{\nu}$ die Eigenschaft (IV.) gemein hat.

Um die Functionen $\mathfrak{J}_{(z)}^{\nu}$ und $\mathfrak{Y}_{(z)}^{\nu}$ durch bestimmte Integrale ausgedrückt zu erhalten, braucht man nur die Gleichungen (1.) und (3.) auf die Definition (I.) der Function $J_{(z)}^{\nu}$ anzuwenden. Man erhält zunächst

$$z^{-\nu} \mathfrak{J}_{(z)}^{\nu} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\partial}{\partial \nu} \left\{ \frac{1}{2^{\nu} \Gamma(\nu+\frac{1}{2})} \int_0^{\pi} \cos(z\cos\omega) \sin^{2\nu}\omega \, d\omega \right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{1}{2^{\nu} \Gamma(\nu+\frac{1}{2})} \int_0^{\pi} \cos(z\cos\omega) \sin^{2\nu}\omega \cdot \log \sin^2\omega \, . \, d\omega \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{2^{\nu} \Gamma(\nu+\frac{1}{2})} \right) \int_0^{\pi} \cos(z\cos\omega) \sin^{2\nu}\omega \, . \, d\omega \right\}.$$

Darin ist

$$\frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\right) = -\frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\left(\frac{\frac{\partial \Gamma(\nu+\frac{1}{2})}{\partial \nu}}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} + \log 2\right)$$

$$= -\frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\left(\frac{\partial \log \Gamma(\nu+\frac{1}{2})}{\partial \nu} + \log 2\right)$$

oder, wenn wir die Gauss'sche Bezeichnung

$$\frac{\partial \log \Gamma(1+x)}{\partial x} = \psi(x)$$

einführen:

$$\frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\right) = -\frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\left(\psi(\nu-\tfrac{1}{2}) + \log 2\right).$$

Wir haben demnach

$$z^{-\nu}\mathfrak{J}^\nu_{(z)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,.\,2^\nu \Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\left\{\int_0^\pi \cos(z\cos\omega)\sin^{2\nu}\omega \log \sin^2\omega\,.\,d\omega\right.$$

$$\left. -\left(\psi(\nu-\tfrac{1}{2}) + \log 2\right)\int_0^\pi \cos(z\cos\omega)\sin^{2\nu}\omega\,.\,d\omega\right\}$$

oder endlich, wenn man beiderseits mit z^ν multiplicirt:

$$(5.)\quad \mathfrak{J}^\nu_{(z)} = \frac{z^\nu}{\sqrt{\pi}\,.\,2^\nu \Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\int_0^\pi \cos(z\cos\omega)\sin^{2\nu}\omega\,.\,\log\sin^2\omega\,.\,d\omega$$

$$-\left(\psi(\nu-\tfrac{1}{2}) + \log 2\right) J^\nu_{(z)}\,.$$

Auf dieselbe Weise findet man

$$z^\nu \mathfrak{Y}^\nu_{(z)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\partial}{\partial\nu}\left\{\frac{z^{2\nu}}{2^\nu \Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\int_0^\pi \cos(z\cos\omega)\sin^{2\nu}\omega\,.\,d\omega\right\}$$

$$= \frac{z^{2\nu}}{\sqrt{\pi}}\frac{\partial}{\partial\nu}\left\{\frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\int_0^\pi \cos(z\cos\omega)\sin^{2\nu}\omega\,.\,d\omega\right\}$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\frac{\partial z^{2\nu}}{\partial\nu}}{2^\nu \Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\int_0^\pi \cos(z\cos\omega)\sin^{2\nu}\omega\,.\,d\omega$$

$$= \frac{z^{2\nu}}{\sqrt{\pi}\,.\,2^\nu \Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\left\{\int_0^\pi \cos(z\cos\omega)\sin^{2\nu}\omega\,.\,\log z^2\sin^2\omega\,.\,d\omega\right.$$

$$\left. -\left(\psi(\nu-\tfrac{1}{2}) + \log 2\right)\int_0^\pi \cos(z\cos\omega)\sin^{2\nu}\omega\,.\,d\omega\right\}$$

oder, wenn noch beiderseits mit $z^{-\nu}$ multiplicirt worden ist:

$$(6.)\qquad \mathfrak{Y}^{\nu}_{(z)} = \frac{z^{\nu}}{\sqrt{\pi}\,.\,2^{\nu}\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\int_0^{\pi}\cos(z\cos\omega)\sin^{2\nu}\omega\,.\,\log z^2\sin^2\omega\,.\,d\omega$$
$$-\Big(\psi(\nu-\tfrac{1}{2})+\log 2\Big)\,J^{\nu}_{(z)}\,.$$

Diese beiden Gleichungen (5.) und (6.) gelten für jedes $\nu > -\frac{1}{2}$.

Zieht man die 5. Gleichung von der 6. ab, so ergibt sich zwischen den Functionen $\mathfrak{J}^{\nu}_{(z)}$ und $\mathfrak{Y}^{\nu}_{(z)}$ der Zusammenhang:

$$(7.)\qquad \mathfrak{Y}^{\nu}_{(z)} - \mathfrak{J}^{\nu}_{(z)} = 2\log z\,.\,J^{\nu}_{(z)}\,.$$

Schreibt man in dieser Gleichung wieder $\sqrt{z}$ statt z, multiplicirt zuerst mit $z^{\frac{\nu}{2}}$, dann mit $z^{-\frac{\nu}{2}}$, und differentiirt m mal nach z, so erhält man

$$\frac{\partial^m\Big(z^{\frac{\nu}{2}}\,\mathfrak{J}^{\nu}_{(\sqrt{z})}\Big)}{\partial z^m} = (\tfrac{1}{2})\,z^{\frac{\nu-m}{2}}\,\mathfrak{Y}^{\nu-m}_{(\sqrt{z})} - \frac{\partial^m\Big(\log z\,.\,z^{\frac{\nu}{2}}\,J^{\nu}_{(\sqrt{z})}\Big)}{\partial z^m}$$

$$\frac{\partial^m\Big(z^{-\frac{\nu}{2}}\,\mathfrak{Y}^{\nu}_{(\sqrt{z})}\Big)}{\partial z^m} = (-\tfrac{1}{2})^m\,z^{-\frac{\nu+m}{2}}\,\mathfrak{J}^{\nu+m}_{(\sqrt{z})} + \frac{\partial^m\Big(\log z\,.\,z^{-\frac{\nu}{2}}\,J^{\nu}_{(\sqrt{z})}\Big)}{\partial z^m}.$$

Eliminirt man mittelst der Gleichung (7.) aus der ersten dieser Formeln $\mathfrak{Y}^{\nu-m}$, aus der zweiten $\mathfrak{J}^{\nu+m}$, so folgt

$$(8.)\qquad \frac{\partial^m\Big(z^{\frac{\nu}{2}}\,\mathfrak{J}^{\nu}_{(\sqrt{z})}\Big)}{\partial z^m} = (\tfrac{1}{2})^m\,z^{\frac{\nu-m}{2}}\,\mathfrak{J}^{\nu-m}_{(\sqrt{z})} + (\tfrac{1}{2})^m\log z\,.\,z^{\frac{\nu-m}{2}}\,J^{\nu-m}_{(\sqrt{z})}$$
$$-\frac{\partial^m\Big(\log z\,.\,z^{\frac{\nu}{2}}\,J^{\nu}_{(\sqrt{z})}\Big)}{\partial z^m},$$

$$(9.)\qquad \frac{\partial^m\Big(z^{-\frac{\nu}{2}}\,\mathfrak{Y}^{\nu}_{(\sqrt{z})}\Big)}{\partial z^m} = (-\tfrac{1}{2})^m\,.\,z^{-\frac{\nu+m}{2}}\,\mathfrak{Y}^{\nu+m}_{(\sqrt{z})} - (-\tfrac{1}{2})^m\log z\,.\,z^{-\frac{\nu+m}{2}}\,J^{\nu+m}_{(\sqrt{z})}$$
$$+\frac{\partial^m\Big(\log z\,.\,z^{-\frac{\nu}{2}}\,J^{\nu}_{(\sqrt{z})}\Big)}{\partial z^m}.$$

Von den Functionen $\mathfrak{J}^{\nu}_{(z)}$ und $\mathfrak{Y}^{\nu}_{(z)}$ genügt also jede nur einem der beiden Gesetze (III.) und (IV.), woraus wir sofort den Schluss ziehen können, dass die Reductionsformel (II.) für keine von beiden gelten wird.

Die den Functionen $\mathfrak{J}^{\nu}_{(z)}$ und $\mathfrak{Y}^{\nu}_{(z)}$ zugehörigen Reductionsformeln erhält man aber unmittelbar, wenn man die Gleichung

$$J^{\nu}_{(z)} = \frac{2(\nu-1)}{z} J^{\nu-1}_{(z)} - J^{\nu-2}_{(z)}$$

zuerst mit $z^{-\nu}$, dann mit z^{ν} multiplicirt und beidemal nach ν differentiirt. Es ergibt sich so:

$$(10.) \qquad \mathfrak{J}^{\nu}_{(z)} = \frac{2(\nu-1)}{z} \mathfrak{J}^{\nu-1}_{(z)} - \mathfrak{J}^{\nu-2}_{(z)} + \frac{2}{z} J^{\nu-1}_{(z)},$$

$$(11.) \qquad \mathfrak{Y}^{\nu}_{(z)} = \frac{2(\nu-1)}{z} \mathfrak{Y}^{\nu-1}_{(z)} - \mathfrak{Y}^{\nu-2}_{(z)} + \frac{2}{z} J^{\nu-1}_{(z)}.$$

Es hat keine Schwierigkeit, die in den Formeln (8.) und (9.) noch vorkommenden $m$ten Differentialquotienten in Gestalt von endlichen nach Bessel'schen Functionen und negativen Potenzen von z geordneten Reihen herzustellen. Man findet nämlich

$$\frac{\partial^m\left(\log z \,.\, z^{-\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial z^m} = \sum \frac{m^{p|-1}}{p!} \cdot \frac{\partial^p \log z}{\partial z^p} \cdot \frac{\partial^{m-p}\left(z^{-\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial z^{m-p}}$$

oder, wenn man, um von der Summe zur Rechten das erste Glied abzutrennen, zuerst $p = 0$, dann $p+1$ statt p setzt:

$$\frac{\partial^m\left(\log z \,.\, z^{-\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial z^m} = (-\tfrac{1}{2})^m \,.\, \log z \,.\, z^{-\frac{\nu+m}{2}} J^{\nu+m}_{(\sqrt{z})}$$

$$+ \sum \frac{m^{p+1|-1}}{(p+1)!} \cdot \frac{\partial^{p+1} \log z}{\partial z^{p+1}} \cdot \frac{\partial^{m-p-1}\left(z^{-\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial z^{m-p-1}}.$$

Nun ist aber

$$\frac{\partial^{p+1} \log z}{\partial z^{p+1}} = \frac{\partial^p z^{-1}}{\partial z^p} = (-1)^{p|-1} z^{-p-1} = (-1)^p \cdot \frac{p!}{z^{p+1}},$$

ferner

$$\frac{\partial^{m-p-1}\left(z^{-\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial z^{m-p-1}} = (-\tfrac{1}{2})^{m-p-1} z^{-\frac{\nu+m-p-1}{2}} J^{\nu+m-p-1}_{(\sqrt{z})}.$$

Folglich hat man

$$(12.) \qquad \frac{\partial^m\left(\log z \,.\, z^{-\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial z^m} = (-\tfrac{1}{2})^m \log z \,.\, z^{-\frac{\nu+m}{2}} J^{\nu+m}_{(\sqrt{z})}$$

$$- (-\tfrac{1}{2})^m \,.\, \sum 2^{p+1} \cdot \frac{m^{p+1|-1}}{p+1} \cdot \frac{J^{\nu+m-p-1}_{(\sqrt{z})}}{z^{\frac{\nu+m+p+1}{2}}}.$$

Ebenso leicht ergibt sich

$$(13.)\quad \frac{\partial^m\left(\log z\,.\,z^{\frac{\nu}{2}}\,\overset{\nu}{J}(\sqrt{z})\right)}{\partial z^m} = (\tfrac{1}{2})^m \log z\,.\,z^{\frac{\nu-m}{2}}\,\overset{\nu-m}{J}(\sqrt{z})$$

$$+ (\tfrac{1}{2})^m\,.\,\sum (-1)^p\,.\,2^{p+1}\,.\,\frac{m^{p+1|-1}}{p+1}\,.\,\frac{\overset{\nu-m+p+1}{J}(\sqrt{z})}{z^{\frac{-\nu+m+p+1}{2}}}\,.$$

§. 22. Die Function $\overset{m}{L}_{(z)}$.

Die beiden letzten Formeln des vorhergehenden Paragraphen treffen für $\nu = 0$ in der folgenden zusammen:

$$(1.)\quad \frac{\partial^m\left(\log z\,.\,\overset{0}{J}(\sqrt{z})\right)}{\partial z^m} = (-\tfrac{1}{2})^m \log z\,.\,z^{-\frac{m}{2}}\,\overset{m}{J}(\sqrt{z})$$

$$- (-\tfrac{1}{2})^m\,.\,\sum 2^{p+1}\,.\,\frac{m^{p+1|-1}}{p+1}\,.\,\frac{\overset{m-p-1}{J}(\sqrt{z})}{z^{\frac{m+p+1}{2}}}\,.$$

Wir setzen nun

$$(2.)\quad \overset{m}{L}_{(z)} = \log z\,.\,\overset{m}{J}_{(z)} - \tfrac{1}{2}\sum 2^{p+1}\,.\,\frac{m^{p+1|-1}}{p+1}\,.\,\frac{\overset{m-p-1}{J}_{(z)}}{z^{p+1}}\,,$$

so dass

$$(2.\,a.)\quad \overset{0}{L}_{(z)} = \log z\,.\,\overset{0}{J}_{(z)}$$

ist; dann lautet obige Gleichung in dieser neuen Bezeichnungsweise ganz einfach

$$(3.)\quad \frac{\partial^m\,\overset{0}{L}(\sqrt{z})}{\partial z^m} = (-\tfrac{1}{2})^m\,z^{-\frac{m}{2}}\,\overset{m}{L}(\sqrt{z})\,.$$

Differentiiren wir diese Formel noch n mal nach z, so ergibt sich

$$\frac{\partial^{m+n}\,\overset{0}{L}(\sqrt{z})}{\partial z^{m+n}} = (-\tfrac{1}{2})^m\,.\,\frac{\partial^n\left(z^{-\frac{m}{2}}\,\overset{m}{L}(\sqrt{z})\right)}{\partial z^n}$$

oder, weil nach (3.)

$$\frac{\partial^{m+n}\,\overset{0}{L}(\sqrt{z})}{\partial z^{m+n}} = (-\tfrac{1}{2})^{m+n}\,.\,z^{-\frac{m+n}{2}}\,\overset{m+n}{L}(\sqrt{z})$$

ist:

$$(4.)\quad \frac{\partial^n\left(z^{-\frac{m}{2}}\,\overset{m}{L}(\sqrt{z})\right)}{\partial z^n} = (-\tfrac{1}{2})^n\,.\,z^{-\frac{m+n}{2}}\,\overset{m+n}{L}(\sqrt{z})\,.$$

Wir haben demnach eine neue Function, die durch Gleichung (2.) definirte Function $\overset{m}{L}_{(z)}$, gefunden, welche dem Grundgesetz (III.) der Bessel'schen Functionen genügt.

Eine der Gleichung (II. §. 1.) analoge Reductionsformel ergibt sich auf folgendem Wege.

Addirt man die beiden Gleichungen

$$L_{(z)}^{m-1} = \log z\, J_{(z)}^{m-1} - \tfrac{1}{2} \sum 2^{p+1} \frac{(m-1)^{p+1|-1}}{p+1} \cdot \frac{J_{(z)}^{m-p-2}}{z^{p+1}},$$

$$L_{(z)}^{m+1} = \log z\, J_{(z)}^{m+1} - \tfrac{1}{2} \sum 2^{p+1} \frac{(m+1)^{p+1|-1}}{p+1} \cdot \frac{J_{(z)}^{m-p}}{z^{p+1}},$$

so erhält man, mit Rücksicht auf die Gleichung

$$J_{(z)}^{m-p-2} = \frac{2}{z}(m-p-1)\, J_{(z)}^{m-p-1} - J_{(z)}^{m-p}$$

vorerst, und indem man der Kürze wegen bei den L und J das Argument z zu schreiben unterlässt

$$\begin{aligned} L^{m-1} + L^{m+1} = {} & \frac{2m}{z} \log z\, J^m \\ & - \tfrac{1}{2} \sum 2^{p+2} \cdot \frac{(m-1)^{p+1|-1}}{p+1} (m-p-1) \cdot \frac{J^{m-p-1}}{z^{p+2}} \\ & + \tfrac{1}{2} \sum 2^{p+1} \cdot \frac{(m-1)^{p+1|-1}}{p+1} \cdot \frac{J^{m-p}}{z^{p+1}} \\ & - \tfrac{1}{2} \sum 2^{p+1} \cdot \frac{(m+1)^{p+1|-1}}{p+1} \cdot \frac{J^{m-p}}{z^{p+1}}. \end{aligned}$$

Nun sondern wir von jeder der beiden letzteren Summen die Anfangsglieder, welche resp. $+\frac{m-1}{z} J^m$ und $-\frac{m+1}{z} J^m$ sind, und zusammen $-\frac{2}{z} J^m$ geben, ab und fassen dann beide, nachdem p durch $p+1$ ersetzt worden, in eine zusammen, welche, da

$$\begin{aligned} \frac{(m-1)^{p+2|-1}}{p+2} - \frac{(m+1)^{p+2|-1}}{p+2} & = \frac{(m-1)^{p|-1}}{p+2} \Big[(m-p-1)(m-p-2) - m(m+1)\Big] \\ & = -(m-1)^{p|-1}(2m-p-1) \end{aligned}$$

ist, wie folgt lautet:

$$-\tfrac{1}{2} \sum 2^{p+2} \cdot (m-1)^{p|-1} (2m-p-1) \cdot \frac{J^{m-p-1}}{z^{p+2}}.$$

Diese Summe hat man nun noch mit der ersten zu vereinigen. Es ist aber

$$\begin{aligned} & \frac{(m-1)^{p+1|-1}}{p+1}(m-p-1) + (m-1)^{p|-1}(2m-p-1) \\ = {} & \frac{(m-1)^{p|-1}}{p+1} \Big[(m-(p+1))^2 + (2m-(p+1))(p+1)\Big] \\ = {} & \frac{(m-1)^{p|-1}}{p+1} \cdot m^2 = m \cdot \frac{m^{p+1|-1}}{p+1}. \end{aligned}$$

Wir haben also schliesslich

$$L^{m-1} + L^{m+1} = \frac{2m}{z} \log z \, J^m - \frac{2}{z} J^m$$
$$- \frac{2m}{z} \cdot \frac{1}{2} \sum 2^{p+1} \cdot \frac{m^{p+1|-1}}{p+1} \cdot \frac{J^{m-p-1}}{z^{p+1}}$$

oder

(5.) $$\frac{2m}{z} L^m_{(z)} = L^{m-1}_{(z)} + L^{m+1}_{(z)} + \frac{2}{z} J^m_{(z)}$$

oder auch

(5. a.) $$L^m_{(z)} = \frac{2(m-1)}{z} L^{m-1}_{(z)} - L^{m-2}_{(z)} - \frac{2}{z} J^m_{(z)} .$$

§. 23. Die Bessel'sche Function zweiter Art $Y^m_{(z)}$.

Wir nennen jede Function eine Bessel'sche, welche, an die Stelle der J gesetzt, zweien von den drei Grundgleichungen (II., III. und IV.) Genüge leistet. Sie unterwirft sich dann jedesmal auch der dritten, welche eine einfache Consequenz der beiden anderen ist, und ausserdem allen Relationen, welche im ersten Abschnitt für die Function J, die Bessel'sche Function erster Art. bloss aus jenen Grundgleichungen abgeleitet worden sind. Eine neue Function mit den genannten Eigenschaften, eine Bessel'sche Function zweiter Art, erhalten wir nun durch Addition der Functionen $\mathfrak{J}^m_{(z)}$ und $L^m_{(z)}$. Addirt man nämlich zur Gleichung (10. §. 21.), nachdem man in ihr das beliebig reelle ν durch das positiv ganze m ersetzt hat, d. h. also zur Gleichung

$$\mathfrak{J}^m_{(z)} = \frac{2(m-1)}{z} \mathfrak{J}^{m-1}_{(z)} - \mathfrak{J}^{m-2}_{(z)} + \frac{2}{z} J^{m-1}_{(z)} ,$$

die letzte Gleichung des vorhergehenden Paragraphen, nämlich

$$L^m_{(z)} = \frac{2(m-1)}{z} L^{m-1}_{(z)} - L^{m-2}_{(z)} - \frac{2}{z} J^{m-1}_{(z)} ,$$

so ergibt sich

$$\mathfrak{J}^m_{(z)} + L^m_{(z)} = \frac{2(m-1)}{z} (\mathfrak{J}^{m-1}_{(z)} + L^{m-1}_{(z)}) - (\mathfrak{J}^{m-2}_{(z)} + L^{m-2}_{(z)}),$$

welche keine andere als die Gleichung (II.) ist, mit dem Unterschied, dass die Summe $\mathfrak{J}^m + L^m$ an der Stelle von J^m steht.

Setzt man ferner in Gleichung (2. §. 21.) m statt ν und n statt m, und addirt die so erhaltene Gleichung

$$\frac{\partial^n \left(z^{-\frac{m}{2}} \mathfrak{J}^m(\sqrt{z})\right)}{\partial z^n} = (-\tfrac{1}{2})^n z^{-\frac{m+n}{2}} \mathfrak{J}^{m+n}(\sqrt{z})$$

zur Gleichung (4.) des vorhergehenden Paragraphen, nämlich zu

$$\frac{\partial^n \left(z^{-\frac{m}{2}} L^m_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial z^n} = (-\tfrac{1}{2})^n z^{-\frac{m+n}{2}} L^{m+n}_{(\sqrt{z})},$$

so folgt

$$\frac{\partial^n}{\partial z^n}\left[z^{-\frac{m}{2}}\left(\mathfrak{J}^m_{(\sqrt{z})} + L^m_{(\sqrt{z})}\right)\right] = (-\tfrac{1}{2})^n . z^{-\frac{m+n}{2}}\left(\mathfrak{J}^{m+n}_{(\sqrt{z})} + L^{m+n}_{(\sqrt{z})}\right)$$

und man erkennt, dass die Summe $\mathfrak{J}^m + L^m$ auch dem zweiten Grundgesetz (III.) sich fügt. Nach unserer Auffassung muss daher die Summe $\mathfrak{J}^m + L^m$ eine Bessel'sche Function, und zwar zum Unterschied von der im ersten Abschnitt betrachteten Function J, eine **Bessel'sche Function zweiter Art** genannt werden.

Sowie es eine Function L^m gibt, welche zu $\mathfrak{J}^m$ hinzugefügt, eine Bessel'sche Function hervorbringt, so wird es auch noch eine Function Λ^m geben müssen, welche mit $\mathfrak{Y}^m$ zusammengenommen ebenfalls eine Bessel'sche Function erzeugt. Wir können dieses Verhalten dadurch ausdrücken, dass wir sagen, L^m sei zu $\mathfrak{J}^m$, Λ^m zu $\mathfrak{Y}^m$ **complementär**. Aus Gleichung (7. §. 21.) erkennt man aber sogleich, dass die zu $\mathfrak{Y}^m$ complementäre Function

$$\Lambda^m_{(z)} = L^m_{(z)} - 2 \log z \, J^m_{(z)}$$

oder

$$\Lambda^m_{(z)} = - \log z \, J^m_{(z)} - \tfrac{1}{2} \sum 2^{p+1} . \frac{m^{p+1|-1}}{p+1} . \frac{J^{m-p-1}_{(z)}}{z^{p+1}}$$

sein wird, und dass für sie die Gleichungen

$$\Lambda^m_{(z)} = \frac{2(m-1)}{z} \Lambda^{m-1}_{(z)} - \Lambda^{m-2}_{(z)} - \frac{2}{z} J^{m-1}_{(z)}$$

und

$$\frac{\partial^n \left(z^{\frac{m}{2}} \Lambda^m_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial z^n} = (\tfrac{1}{2})^n . z^{\frac{m-n}{2}} \Lambda^{m-n}_{(\sqrt{z})}$$

gelten. Die Summe $\mathfrak{Y}^m + \Lambda^m$ ist dann ebenfalls eine Bessel'sche Function und zwar mit $\mathfrak{J}^m + L^m$ vollkommen identisch.

Da die Grundgleichungen (II., III. und IV.) hinsichtlich der Functionen J^m und $\mathfrak{J}^m + L^m$ linearer Natur sind, so werden ihnen nicht nur diese Functionen an und für sich, sondern ebensogut auch die Function

$$a \, J^m_{(z)} + b \left(\mathfrak{J}^m_{(z)} + L^m_{(z)}\right)$$

Genüge leisten, wo unter a und b beliebige von z unabhängige Grössen zu denken sind. Durch Hinzufügung des Gliedes $a \, J^m_{(z)}$

wird in den von uns aufgestellten Begriff der Bessel'schen Function zweiter Art nichts Neues und Fremdartiges hineingetragen, und wir können daher, solange b nicht Null ist, vorstehenden Ausdruck als die allgemeinste Form der Bessel'schen Function zweiter Art betrachten. Wir können ferner durch zweckmässige Bestimmung der Constanten a und b unserer Function eine möglichst einfache Gestalt geben und diese sodann als Typus der Bessel'schen Functionen zweiter Art hinstellen.

Setzen wir zu diesem Zwecke, und namentlich um die in $\mathfrak{J}^m_{(z)}$ vorkommende Function $\psi(m-\frac{1}{2})$ wegzubringen, $b=1$ und $a=\psi(m-\frac{1}{2})+\log 2$, so erhalten wir als einfachsten Ausdruck für die Bessel'sche Function zweiter Art

$$(\text{I}.\alpha.)\qquad Y^m_{(z)} = \frac{z^m}{\pi \cdot 1^{m|2}} \int_0^\pi \cos(z\cos\omega) \cdot \sin^{2m}\omega \log\sin^2\omega \cdot d\omega$$

$$+ \log z \cdot J^m_{(z)} - \tfrac{1}{2}\sum 2^{p+1} \cdot \frac{m^{p+1|-1}}{p+1} \cdot \frac{J^{m-p-1}_{(z)}}{z^{p+1}}$$

oder auch

$$(\text{I}.\beta.)\qquad Y^m_{(z)} = K^m_{(z)} + L^m_{(z)},$$

worin

$$(\text{I}.\gamma.)\qquad \begin{cases} K^m_{(z)} = \dfrac{z^m}{\pi \cdot 1^{m|2}} \displaystyle\int_0^\pi \cos(z\cos\omega)\sin^{2m}\omega \log\sin^2\omega \cdot d\omega \\ L^m_{(z)} = \log z \cdot J^m_{(z)} - \tfrac{1}{2}\displaystyle\sum 2^{p+1} \cdot \frac{m^{p+1|-1}}{p+1} \cdot \frac{J^{m-p-1}_{(z)}}{z^{p+1}} \end{cases}$$

ist. Diese Formeln, weniger allgemein, als die für die Bessel'sche Function erster Art gegebenen, gelten nur für positiv ganze Werthe von m, die Null mit inbegriffen.

Setzen wir z. B. $m=0$, so gewinnt der Ausdruck für $Y^0_{(z)}$ folgende einfache Gestalt

$$(\text{I}.\delta.)\qquad Y^0_{(z)} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(z\cos\omega)\log(z\sin^2\omega) \cdot d\omega .$$

Wir bemerken hiezu noch, dass die hier eingeführte Function $K^m_{(z)}$ mit $\mathfrak{J}^m_{(z)}$ die in den Gleichungen

$$K^m_{(z)} = \frac{2(m-1)}{z} K^{m-1}_{(z)} - K^{m-2}_{(z)} + \frac{2}{z} J^{m-1}_{(z)}$$

und

$$\frac{\partial^n\left(z^{-\frac{m}{2}} \overset{m}{K}(\sqrt{z})\right)}{\partial z^n} = (-\tfrac{1}{2})^n \cdot z^{-\frac{m+n}{2}} \overset{m+n}{K}(\sqrt{z})$$

ausgesprochenen Eigenschaften theilt.

Endlich mögen noch die wichtigeren derjenigen Formeln, welche für Y^m wie für J^m in gleicher Weise gelten, hier eine Zusammenstellung finden.

(II.) $$Y^m_{(z)} = \frac{2(m-1)}{z} Y^{m-1}_{(z)} - Y^{m-2}_{(z)}$$

(II. α.) $$\frac{2m}{z} Y^m_{(z)} = Y^{m-1}_{(z)} - Y^{m+1}_{(z)}$$

(II. β.) $$Y^{m+1} = Y^1 \sum (-1)^p \cdot \frac{(m-p)^{p|-1}}{p!} \frac{(2p+2)^{m-2p|2}}{z^{m-2p}}$$
$$- Y^0 \sum (-1)^p \cdot \frac{(m-1-p)^{p|-1}}{p!} \frac{(2p+4)^{m-1-2p|2}}{z^{m-1-2p}}$$

(III.) $$\frac{\partial^n\left(z^{-\frac{m}{2}} \overset{m}{Y}(\sqrt{z})\right)}{\partial z^n} = (-\tfrac{1}{2})^n z^{-\frac{m+n}{2}} \overset{m+n}{Y}(\sqrt{z})$$

(IV.) $$\frac{\partial^n\left(z^{\frac{m}{2}} \overset{m}{Y}(\sqrt{z})\right)}{\partial z^n} = (\tfrac{1}{2})^n z^{\frac{m-n}{2}} \overset{m-n}{Y}(\sqrt{z})$$

$$\frac{\partial^{2m}\left(z^{\frac{m}{2}} \overset{m}{Y}(\sqrt{z})\right)}{\partial z^{2m}} = (-1)^m \cdot \frac{z^{-\frac{m}{2}}}{2^{2m}} \overset{m}{Y}(\sqrt{z})$$

$$2\frac{\partial Y^m_{(z)}}{\partial z} = Y^{m-1}_{(z)} - Y^{m+1}_{(z)}$$

$$\frac{\partial^n Y^m_{(z)}}{\partial z^n} = (\tfrac{1}{2})^n \sum (-1)^p \cdot \frac{n^{p|-1}}{p!} Y^{m-n+2p}_{(z)}$$

$$\frac{2m}{z} \cdot \frac{\partial (Y^m_{(z)})^2}{\partial z} = (Y^{m-1}_{(z)})^2 - (Y^{m+1}_{(z)})^2$$

$$Y^{-m}_{(z)} = (-1)^m Y^m_{(z)}$$

(VI.) $$(z+h)^{-\frac{m}{2}} \overset{m}{Y}(\sqrt{z+h}) = \sum (-1)^p \cdot \frac{h^p}{2^{p|2}} z^{-\frac{m+p}{2}} \overset{m+p}{Y}(\sqrt{z})$$

(VII.) $$(z+h)^{\frac{m}{2}} \overset{m}{Y}(\sqrt{z+h}) = \sum \frac{h^p}{2^{p|2}} z^{\frac{m-p}{2}} \overset{m-p}{Y}(\sqrt{z})$$

$$Y^m_{(\lambda z)} = \lambda^m \sum (-1)^p \frac{(\lambda^2-1)^p}{2^{p|2}} z^p Y^{m+p}_{(z)} .$$

§. 24. Entwickelung von $\mathfrak{J}^{\nu}_{(z)}$ und $K^{m}_{(z)}$ nach Potenzen von z.

Nach Formel (VIII.) des §. 5. ist

$$J^{\nu}_{(z)} = \sum (-1)^p \frac{z^{\nu+2p}}{2^{p|2}\, 2^{\nu+p}\, \Gamma(\nu+p+1)},$$

also

$$z^{-\nu} J^{\nu}_{(z)} = \sum (-1)^p \cdot \frac{z^{2p}}{2^{p|2}\, 2^{\nu+p}\, \Gamma(\nu+p+1)}.$$

Wir differentiiren hier beiderseits nach ν, nach Anleitung der Gleichung (1. §. 21.), welche die Definition von $\mathfrak{J}^{\nu}_{(z)}$ ausspricht, und erhalten

$$z^{-\nu} \mathfrak{J}^{\nu}_{(z)} = \sum (-1)^p \cdot \frac{z^{2p}}{2^{p|2}} \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{2^{\nu+p}\, \Gamma(\nu+p+1)} \right).$$

Darin ist

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{2^{\nu+p}\, \Gamma(\nu+p+1)} \right) = - \frac{1}{2^{\nu+p}\, \Gamma(\nu+p+1)} \left(\frac{\partial \log \Gamma(\nu+p+1)}{\partial \nu} + \log 2 \right)$$

$$= - \frac{1}{2^{\nu+p}\, \Gamma(\nu+p+1)} \left(\psi(\nu+p) + \log 2 \right).$$

Wir haben demnach

$$\mathfrak{J}^{\nu}_{(z)} = - \sum (-1)^p \cdot \frac{z^{\nu+2p}}{2^{p|2}\, 2^{\nu+p}\, \Gamma(\nu+p+1)} \left(\psi(\nu+p) + \log 2 \right)$$

oder

$$\mathfrak{J}^{\nu}_{(z)} = - J^{\nu}_{(z)} \,.\, \log 2 - \sum (-1)^p \cdot \frac{\psi(\nu+p)\, z^{\nu+2p}}{2^{p|2}\, 2^{\nu+p}\, \Gamma(\nu+p+1)}.$$

Die Reihe zur Rechten convergirt für jeden Werth von z. Denn der absolute Werth des Quotienten des $(p+2)^{\text{ten}}$ durch das vorhergehende Glied, d. i.:

$$\frac{z^2}{(2p+2)(2\nu+2p+2)} \cdot \frac{\psi(\nu+p+1)}{\psi(\nu+p)}$$

nähert sich bei wachsendem p, was immer auch z sein mag, der Grenze Null. Da nämlich

$$\psi(\nu+p+1) = \psi(\nu+p) + \frac{1}{\nu+p},$$

also

$$\frac{\psi(\nu+p+1)}{\psi(\nu+p)} = 1 + \frac{1}{(\nu+p)\,\psi(\nu+p)}$$

ist, so nähert sich $\frac{\psi(\nu+p+1)}{\psi(\nu+p)}$, wenn p zunimmt, dem Grenzwerthe 1.

Aus obiger Formel für $J^{\nu}_{(z)}$ erhält man sofort diejenige für $K^{m}_{(z)}$, wenn man, nachdem ν durch das positiv ganze m ersetzt ist, beiderseits $(\psi(m-\frac{1}{2}) + \log 2)\, J^{m}_{(z)}$ addirt. Zerlegt man gleichzeitig $\psi(m+p)$ nach der Gleichung

$$\psi(m+p) = \psi(m) + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \cdots + \frac{1}{m+p},$$

so findet man

$$K^{m}_{(z)} = \left(\psi(m-\tfrac{1}{2}) - \psi(m)\right) J^{m}_{(z)}$$
$$- \sum (-1)^{p+1} \frac{z^{m+2p+2}}{2^{p+1|2}\, 2^{m+p+1|2}} \left(\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \cdots + \frac{1}{m+p+1}\right).$$

Nun ist

$$\psi(m-\tfrac{1}{2}) - \psi(m) = 2\,\psi(2m) - 2\,\psi(m) - 2\log 2$$

oder, da

$$\psi(m) = \psi(0) + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m}$$

$$\psi(m-\tfrac{1}{2}) - \psi(m) = 2\left(\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \cdots + \frac{1}{2m}\right) - 2\log 2$$

$$= 2 \sum_{q=0}^{q=m-1} \frac{1}{m+1+q} - 2\log 2\,.$$

Wir haben also endlich

$$\text{(VIII.}\alpha.) \qquad K^{m}_{(z)} = \left(2\sum_{q=0}^{q=m-1} \frac{1}{m+1+q} - 2\log 2\right) \cdot J^{m}_{(z)}$$
$$+ \sum \left[(-1)^{p} \cdot \frac{z^{m+2p+2}}{2^{p+1|2}\, 2^{m+p+1|2}} \sum_{q=0}^{q=p} \frac{1}{m+1+q}\right]$$

und speciell für $m=0$ und $m=1$

$$\text{(VIII.}\beta.) \quad \begin{cases} K^{0}_{(z)} = -2\log 2\,.\, J^{0}_{(z)} + \sum \left[(-1)^{p} \cdot \dfrac{z^{2p+2}}{(2^{p+1|2})^2} \displaystyle\sum_{q=0}^{q=p} \frac{1}{1+q}\right] \\ K^{1}_{(z)} = (1-2\log 2)\, J^{1}_{(z)} + \sum \left[(-1)^{p} \cdot \dfrac{z^{2p+3}}{2^{p+1|2}\, 2^{p+2|2}} \displaystyle\sum_{q=0}^{q=p} \frac{1}{2+q}\right]. \end{cases}$$

Die nämlichen Resultate hätte man auch, allerdings mit grösserer Mühe, gefunden, indem man in der Formel

$$(z+h)^{-\frac{\nu}{2}}\, \mathfrak{J}^{\nu}(\sqrt{z+h}) = \sum (-1)^{p} \cdot \frac{h^{p}}{2^{p|2}}\, z^{-\frac{\nu+p}{2}}\, J^{\nu+p}(\sqrt{z})$$

$z=0$ und $h=z^2$ gesetzt und sodann in

$$z^{-\nu}\,\mathfrak{J}^{\nu}_{(z)} = \sum (-1)^p \cdot \frac{z^{2p}}{2^{p|2}} \left(\frac{\mathfrak{J}^{\nu+p}_{(z)}}{z^{\nu+p}}\right)_{z=0}$$

den Ausdruck

$$\left(\frac{\mathfrak{J}^{\nu+p}_{(z)}}{z^{\nu+p}}\right)_{z=0} = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,.\,2^{\nu+p}\,.\,\Gamma(\nu+p+\frac{1}{2})}\int_0^{\pi} \sin^{2\nu+2p}\omega\,.\,\log\sin^2\omega\,.\,d\omega$$

$$-\left(\psi(\nu+p-\tfrac{1}{2})+\log 2\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi}\,.\,2^{\nu+p}\,\Gamma(\nu+p+\frac{1}{2})}\int_0^{\pi}\sin^{2\nu+2p}\omega\cdot d\omega$$

unmittelbar durch Integration bestimmt hätte.

§. 25. Verschiedene Reihen.

Um für die Bessel'sche Function zweiter Art Reihenentwickelungen zu bekommen, die denen des §. 9. analog sind, setzen wir in Gleichung (VII. §. 23.) $h = -z$, und erhalten zunächst

$$\sum (-1)^p \cdot \frac{z^{\frac{m+p}{2}}}{2^{p|2}}\, Y^{m-p}(\sqrt{z}) = \left(z^m\, Y^m_{(z)}\right)_{z=0}.$$

Nun ist aber

$$z^m\,Y^m_{(z)} = \frac{z^{2m}}{\pi\,.\,1^{m|2}}\int_0^{\pi}\cos(z\cos\omega)\sin^{2m}\omega\log\sin^2\omega\,.\,d\omega$$

$$+\,z^m\log z\,.\,J^m_{(z)} - \frac{1}{2}\sum 2^{p+1}\,.\,\frac{m^{p+1|-1}}{p+1}\,z^{m-p-1}\,J^{m-p-1}_{(z)}.$$

Setzt man darin $z = 0$, so verschwindet, unter der Voraussetzung, dass $m > 1$ ist, zur Rechten Alles, mit Ausnahme des letzten Gliedes der Summe Σ, in welchem $p = m - 1$ ist. Man hat daher

$$\left(z^m\,Y^m_{(z)}\right)_{z=0} = -\,2^{m-1}\,(m-1)! = -\,2^{m-1|2}.$$

Dieser Werth werde oben eingesetzt, gleichzeitig z^2 statt z und $m+1$ statt m (um der Bedingung $m > 1$ zu genügen) geschrieben und endlich noch beiderseits mit z^{m+1} dividirt, so kommt

$$\sum(-1)^p\cdot\frac{z^p}{2^{p|2}}\,Y^{m+1-p}_{(z)} = -\,\frac{2^{m|2}}{z^{m+1}}.$$

Unterwirft man diese Gleichung derselben Reihenfolge von Operationen, welche in §. 9. mit der entsprechenden Gleichung (4.) vorgenommen wurden, so gelangt man zu der Formel

$$(1.)\quad \sum \frac{z^{m+1+p}}{2^{m+1+p|2}} Y^p_{(z)} = (-1)^m \cdot \frac{2^{m|2}}{z^{m+1}} + \sum_{p=0}^{p=m} (-1)^p \cdot \frac{z^{m-p}}{2^{m-p|2}} Y^{p+1}_{(z)},$$

d. h. specialisirt

$$(1.\alpha.)\quad \begin{cases} \frac{z}{2} Y^0 + \frac{z^2}{2\cdot 4} Y^1 + \frac{z^3}{2\cdot 4\cdot 6} Y^2 + \cdots \\ \qquad = \frac{1}{z} + Y^1 \\ \frac{z^2}{2\cdot 4} Y^0 + \frac{z^3}{2\cdot 4\cdot 6} Y^1 + \frac{z^4}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} Y^2 + \cdots \\ \qquad = -\frac{2}{z^2} + \frac{z}{2} Y^1 - Y^2 \\ \frac{z^3}{2\cdot 4\cdot 6} Y^0 + \frac{z^4}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} Y^1 + \frac{z^5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10} Y^2 + \cdots \\ \qquad = \frac{2\cdot 4}{z^3} + \frac{z^2}{2\cdot 4} Y^1 - \frac{z}{2} Y^2 + Y^3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Und lässt man diesen Gleichungen wieder dieselbe Behandlung angedeihen, welche im §. 7. an der analogen Gruppe geübt wurde, so findet man

$$(2.)\quad \begin{cases} Y^1 = \sum \frac{z^{p+1}}{2^{p+1|2}} Y^p - \frac{1}{z} \\ Y^2 = \sum \frac{(p+1)\, z^{p+2}}{2^{p+2|2}} Y^p - \frac{1}{2} - \frac{2}{z^2} \\ Y^3 = \sum \frac{(p+1)^{2|1}}{2!} \frac{z^{p+3}}{2^{p+3|2}} Y^p - \frac{z}{2\cdot 4} - \frac{1}{z} - \frac{2\cdot 4}{z^3} \\ Y^4 = \sum \frac{(p+1)^{3|1}}{3!} \cdot \frac{z^{p+4}}{2^{p+4|2}} Y^p - \frac{z^2}{2\cdot 4\cdot 6} - \frac{2}{2\cdot 4} - \frac{2\cdot 4}{2 z^2} - \frac{2\cdot 4\cdot 6}{z^4} \\ \vdots \end{cases}$$

Jede dieser Gleichungen ergibt sich durch Differentiation der Vorhergehenden, indem man in dieser $\sqrt{z}$ statt z setzt, beiderseits mit $z^{-\frac{m+1}{2}}$ multiplicirt (unter $m+1$ den Index von Y zur Linken in der fraglichen Gleichung verstanden) und dann zur Linken die Grundgleichung (III.), zur Rechten unter dem Summenzeichen aber (IV.) anwendet. Durch diese Gruppe von Formeln kann also jede Bessel'sche Function zweiter Art, von Y^1 an, durch alle übrigen und durch eine rationale Function von z ausgedrückt werden.

Die Gleichung (VI.) ist einer analogen Behandlung nicht fähig, weil $z^{-m}\, Y^m_{(z)}$ für $z=0$ unendlich gross wird. Wohl aber kann dieses Verfahren auf die Function $K^m_{(z)}$ angewendet werden, welche der nämlichen Gleichung (VI.) Genüge leistet. Setzen wir also in

$$(z+h)^{-\frac{m}{2}}\, K^m_{(\sqrt{z+h})} = \sum (-1)^p \cdot \frac{h^p}{2^{p|2}} \cdot z^{-\frac{m+p}{2}}\, K^{m+p}_{(\sqrt{z})}$$

$h=-z$, so folgt

$$\sum \frac{z^{\frac{p-m}{2}}}{2^{p|2}}\, K^{m+p}_{(\sqrt{z})} = \left(\frac{K^m_{(z)}}{z^m}\right)_0.$$

Zufolge Gleichung (VIII. α.) des vorausgehenden Paragraphen ist aber

$$\left(\frac{K^m_{(z)}}{z^m}\right)_{z=0} = 2\left(\sum_{q=0}^{q=m-1}\frac{1}{m+1+q} - \log 2\right)\left(\frac{J^m_{(z)}}{z^m}\right)_{z=0}$$
$$= \frac{2}{2^{m|2}}\left(\sum_{q=0}^{q=m-1}\frac{1}{m+1+q} - \log 2\right).$$

Setzt man diesen Werth oben ein, schreibt auch z^2 statt z und multiplicirt sodann beiderseits mit z^m, so hat man

$$(3.)\qquad \sum \frac{z^p}{2^{p|2}}\, K^{m+p}_{(z)} = \frac{2\,z^m}{2^{m|2}}\left(\sum_{q=0}^{q=m-1}\frac{1}{m+1+q} - \log 2\right),$$

eine Formel, welche der Gleichung (3.) des §. 9. vollkommen analog ist. Für $m=0$ z. B. lautet dieselbe:

$$(3.\alpha.)\quad K^0 + \frac{z}{2}\, K^1 + \frac{z^2}{2\cdot 4}\, K^2 + \frac{z^3}{2\cdot 4\cdot 6}\, K^3 + \cdots = -2\log 2$$

u. s. w. f.

Die Eintwickelung von $Y^m_{(z+h)}$ findet man, indem man Schritt für Schritt den Weg verfolgt, der in §. 10. zur Entwickelung von $J^m_{(z+h)}$ führte. Man erhält auf diese Weise

$$(\text{IX.}\alpha.)\qquad Y^m_{(z+h)} = J^m_{(h)}\, Y^0_{(z)} + \Sigma\, J^{m-r-1}_{(h)}\, Y^{r+1}_{(z)} + \Sigma\, J^{m+r+1}_{(h)}\,.\, Y^{-(r+1)}_{(z)}$$

oder auch, weil z und h mit einander zertauscht werden können:

$$(\text{IX.}\beta.)\qquad Y^m_{(z+h)} = Y^0_{(h)}\, J^m_{(z)} + \Sigma\, Y^{r+1}_{(h)}\, J^{m-r-1}_{(z)} + \Sigma\, Y^{-(r+1)}_{(h)}\,.\, J^{m+r+1}_{(z)}.$$

Daraus folgt für $m=0$

$$(\text{IX.}\gamma.)\qquad Y^0_{(z+h)} = J^0_{(h)}\, Y^0_{(z)} - 2\, J^1_{(h)}\, Y^1_{(z)} + 2\, J^2_{(h)}\, Y^2_{(z)} - 2\, J^3_{(h)}\, Y^3_{(z)} + 2\, J^4_{(h)}\, Y^4_{(z)} - \cdots$$

oder auch

$$(\text{IX}.\delta.) \qquad Y^0_{(z+h)} = Y^0_{(h)}\, J^0_{(z)} - 2\, Y^1_{(h)}\, J^1_{(z)} + 2\, Y^2_{(h)}\, J^2_{(z)} - 2\, Y^3_{(h)}\, J^3_{(z)} + 2\, Y^4_{(h)}\, J^4_{(z)} - \cdots$$

Diese Formeln zeigen uns, dass $Y^m_{(z+h)}$ sowohl nach Bessel'schen Functionen erster Art als auch zweiter Art entwickelt werden kann.

§. 26. Entwickelung von $Y^m_{(z)}$ nach negativen Potenzen von z.

Nach §. 17, Gleichung (1.) ist

$$J^\nu_{(z)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} \left\{ e^{i\left(z - \frac{2\nu+1}{4}\pi\right)} (P + Qi) + e^{-i\left(z - \frac{2\nu+1}{4}\pi\right)} (P - Qi) \right\},$$

folglich

$$z^{-\nu} J^\nu_{(z)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} \left\{ e^{i\left(z - \frac{2\nu+1}{4}\pi\right) - \nu \log z} (P + Qi) + e^{-i\left(z - \frac{2\nu+1}{4}\pi\right) - \nu \log z} (P - Qi) \right\}.$$

Differentiirt man diese Gleichung, die Definition von $\mathfrak{Z}^\nu_{(z)}$ (1. §. 21.) beachtend, beiderseits nach ν, und multiplicirt nachträglich wieder mit z^ν, so erhält man

$$\mathfrak{Z}^\nu_{(z)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} \left\{ e^{i\left(z - \frac{2\nu+1}{4}\pi\right)} (P + Qi)\left(-\log z - \tfrac{1}{2}\pi i\right) + e^{-i\left(z - \frac{2\nu+1}{4}\pi\right)} (P - Qi)\left(-\log z + \tfrac{1}{2}\pi i\right) \right\}$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} \left\{ e^{i\left(z - \frac{2\nu+1}{4}\pi\right)} (P' + Q'i) + e^{-i\left(z - \frac{2\nu+1}{4}\pi\right)} (P' - Q'i) \right\}$$

oder, was dasselbe ist

$$\mathfrak{Z}^\nu_{(z)} = -\log z \,.\, J^\nu_{(z)} - \tfrac{1}{2}\pi i \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} \left\{ e^{i\left(z - \frac{2\nu+1}{4}\pi\right)} (P + Qi) - e^{-i\left(z - \frac{2\nu+1}{4}\pi\right)} (P - Qi) \right\}$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} \left\{ e^{i\left(z - \frac{2\nu+1}{4}\pi\right)} (P' + Q'i) + e^{-i\left(z - \frac{2\nu+1}{4}\pi\right)} (P' - Q'i) \right\},$$

worin P' und Q' die nach ν genommenen Ableitungen von P und Q bedeuten. Die hier anzuwendenden Werthe von P und Q

gehen aber aus P^m und Q^m (Gl. 4. §. 16.) hervor, wenn man in diesen m durch $\nu - \frac{1}{2}$ ersetzt; danach ist

$$(1.)\begin{cases} P = \sum (-1)^p \cdot \frac{(2\nu+1)^{2p|2}(2\nu-1)^{2p|-2}}{8^{2p|8}} \cdot \frac{1}{z^{2p}} \\ \quad = 1 - \sum (-1)^p \cdot \frac{(2\nu+1)^{2p+2|2}(2\nu-1)^{2p+2|-2}}{8^{2p+2|8}} \cdot \frac{1}{z^{2p+2}} \\ Q = \sum (-1)^p \cdot \frac{(2\nu+1)^{2p+1|2}(2\nu-1)^{2p+1|-2}}{8^{2p+1|8}} \cdot \frac{1}{z^{2p+1}} \cdot \end{cases}$$

Um daraus P' und Q' zu erhalten, muss zuerst

$$\frac{\partial (2\nu+1)^{r+1|2}(2\nu-1)^{r+1|-2}}{\partial \nu}$$

bestimmt werden. Es ist aber

$$\log (2\nu+1)^{r+1|2}(2\nu-1)^{r+1|-2}$$
$$= \sum_{q=0}^{q=r} \log (2\nu+1+2q) + \sum_{q=0}^{q=r} \log (2\nu-1-2q),$$

folglich, wenn man hier beiderseits nach ν differentiirt:

$$\left(\frac{\partial (2\nu+1)^{r+1|2}(2\nu-1)^{r+1|-2}}{\partial \nu}\right) : (2\nu+1)^{r+1|2}(2\nu-1)^{r+1|-2}$$
$$= \sum_{q=0}^{q=r} \frac{2}{2\nu+1+2q} + \sum_{q=0}^{q=r} \frac{2}{2\nu-1-2q}.$$

Wir erhalten sodann nach gehöriger Substitution:

$$(2.)\begin{cases} P' = -2\sum (-1)^p \left(\sum_{q=0}^{q=2p+1} \frac{1}{2\nu+1+2q} \right. \\ \qquad \left. + \sum_{q=0}^{q=2p+1} \frac{1}{2\nu-1-2q}\right) \cdot \frac{(2\nu+1)^{2p+2|2}(2\nu-1)^{2p+2|-2}}{8^{2p+2|8}} \cdot \frac{1}{z^{2p+2}}. \\ Q' = 2\sum (-1)^p \left(\sum_{q=0}^{q=2p} \frac{1}{2\nu+1+2q} \right. \\ \qquad \left. + \sum_{q=0}^{q=2p} \frac{1}{2\nu-1-2q}\right) \cdot \frac{(2\nu+1)^{2p+2|2}(2\nu-1)^{2p+1|-2}}{8^{2p+1|8}} \cdot \frac{1}{z^{2p+1}} \end{cases}$$

und haben sonach die Function $\mathfrak{Y}^{\nu}_{(z)}$ nach negativen Potenzen von z entwickelt.

Die entsprechende Entwickelung von $Y^m_{(z)}$ selbst erhalten wir daraus sofort, wenn wir, nachdem ν durch das positiv ganze m ersetzt ist,

$$(\psi(m-\tfrac{1}{2}) + \log 2)\, J^m_{(z)} + L^m_{(z)}$$

hinzuzählen. Berücksichtigen wir gleichzeitig, dass

$$i\left\{e^{i\zeta}(P+Qi) - e^{-i\zeta}(P-Qi)\right\} = -2\,(P\sin\zeta + Q\cos\zeta)$$

und

$$e^{i\zeta}(P'+Q'i) + e^{-i\zeta}(P'-Q'i) = 2\,(P'\cos\zeta - Q'\sin\zeta)$$

ist (wo nur der Kürze wegen ζ statt $z - \frac{2m+1}{4}\pi$ geschrieben wurde), so haben wir

$$(3.)\quad Y^m_{(z)} = \left(\psi(m-\tfrac{1}{2}) + \log 2\right) J^m_{(z)} - \tfrac{1}{2}\sum 2^{p+1}\cdot\frac{m^{p+1|-1}}{p+1}\cdot\frac{J^{m-p-1}_{(z)}}{z^{p+1}}$$

$$+ \tfrac{1}{2}\pi.\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{P\sin\left(z - \frac{2m+1}{4}\pi\right) + Q\cos\left(z - \frac{2m+1}{4}\pi\right)\right\}$$

$$+ \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{P'\cos\left(z - \frac{2m+1}{4}\pi\right) - Q'\sin\left(z - \frac{2m+1}{4}\pi\right)\right\}.$$

Darin ist

$$\psi(m-\tfrac{1}{2}) = \psi(-\tfrac{1}{2}) + \frac{1}{1+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{1}{m+\frac{1}{2}}$$

oder $\psi(m-\tfrac{1}{2}) = \psi(0) - 2\log 2 + 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2m+1}\right)$,

wo $\psi(0)$ die sogenannte Constante des Integrallogarithmen, nämlich

$$\psi(0) = -0{,}5772156649015328606\cdots$$

ist. Statt P, Q, P', Q' sind die bereits oben gegebenen Formeln, nur m statt ν gesetzt, zu gebrauchen.

Für $m = 0$ ist

$$\sum_{q=0}^{q=r}\frac{1}{1+2q} + \sum_{q=0}^{q=r}\frac{1}{-1-2q} = 0$$

und darum auch $P' = 0$ und $Q' = 0$; man hat daher einfach

$$(4.)\quad Y^0_{(z)} = (\psi(0) - \log 2)\, J^0_{(z)} + \tfrac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{P_0\sin(z-\tfrac{1}{4}\pi) + Q_0\cos(z-\tfrac{1}{4}\pi)\right\}.$$

und dabei

$$(4.a.)\quad \begin{cases} P_0 = \sum(-1)^p\cdot\frac{(1^{2p|2})^2}{8^{2p|8}}\cdot\frac{1}{z^{2p}} \\ Q_0 = -\sum(-1)^p\cdot\frac{(1^{2p+1|2})^2}{8^{2p+1|8}}\cdot\frac{1}{z^{2p+1}}. \end{cases}$$

Für $m = 1$ dagegen hat man

$$\sum_{q=0}^{q=r}\frac{1}{2q+3}-\sum_{q=0}^{q=r}\frac{1}{2q-1}=\sum_{q=0}^{q=r}\frac{1}{2q+3}+1-1-\sum_{q=0}^{q=r-2}\frac{1}{2q+3}$$

$$=\sum_{q=0}^{q=r-2}\frac{1}{2q+3}+\frac{1}{2r+1}+\frac{1}{2r+3}-\sum_{q=0}^{q=r-2}\frac{1}{2q+3}$$

$$=\frac{1}{2r+1}+\frac{1}{2r+1}.$$

Dann ist

$$Y^1_{(z)}=(\psi(0)+\tfrac{3}{4}-\log 2)\,J^1_{(z)}-\frac{J^0_{(z)}}{z} \tag{5.}$$

$$-\tfrac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{P_1\cos(z-\tfrac{1}{4}\pi)-Q_1\sin(z-\tfrac{1}{4}\pi)\right\}$$

$$+\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{P_1'\sin(z-\tfrac{1}{4}\pi)+Q_1'\cos(z-\tfrac{1}{4}\pi)\right\}$$

und dabei

$$(5.\text{a.})\quad\begin{cases}P_1=1+\sum(-1)^p\cdot\dfrac{3^{2p+2|2}\,1^{2p+1|2}}{8^{2p+2|8}}\cdot\dfrac{1}{z^{2p+2}}\\[2ex] Q_1=\sum(-1)^p\cdot\dfrac{3^{2p+1|2}\,1^{2p|2}}{8^{2p+1|8}}\cdot\dfrac{1}{z^{2p+1}}\\[2ex] P_1'=2\sum(-1)^p\cdot\dfrac{8p+8}{4p+3}\cdot\dfrac{3^{2p+1|2}\,1^{2p+1|2}}{8^{2p+2|8}}\cdot\dfrac{1}{z^{2p+2}}\\[2ex] Q_1'=2\sum(-1)^p\cdot\dfrac{8p+4}{4p+1}\cdot\dfrac{3^{2p|2}\,1^{2p|2}}{8^{2p+1|8}}\cdot\dfrac{1}{z^{2p+1}}.\end{cases}$$

Mit Hilfe dieser Formeln lassen sich, für einigermassen grosse z, die Werthe von Y^0 und Y^1 und mittelst der Formel (3.) überhaupt die Werthe von $Y^m_{(z)}$ bequem berechnen.

Die vorkommenden unendlichen Reihen gehören, wie diejenigen des §. 17., zur Classe der halbconvergenten.

Bei stets wachsendem z nähern sich die Werthe der Reihen Q, P' und Q' der Grenze 0, derjenige der Reihe P aber der Grenze 1; auch die Glieder der in dem Ausdrucke (3.) für $Y^m_{(z)}$ vorkommenden endlichen Reihe

$$\tfrac{1}{2}\sum 2^{p+1}\cdot\frac{m^{p+1|-1}}{p+1}\cdot\frac{J^{m-p-1}_{(z)}}{z^{p+1}}$$

gehen, wie man sich leicht überzeugen wird, bei wachsendem z gegen Null. Da nun ferner, wenn man die Gleichungen (11. §. 17.) in eine zusammenfasst

$$J^m_{(z)} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cdot \cos\left(z - \frac{2m+1}{4}\pi\right)$$

ist, so hat man für ein äusserst grosses z:

$$(6.)\quad Y^m_{(z)} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{ \left(\psi(m-\tfrac{1}{2}) + \log 2\right) \cos\left(z - \frac{2m+1}{4}\pi\right) + \tfrac{1}{2}\pi \sin\left(z - \frac{2m+1}{4}\pi\right) \right\}.$$

Aus dieser Gleichung lässt sich erkennen, dass die Differerenz zweier aufeinanderfolgenden Wurzeln der Gleichung $Y^m_{(z)} = 0$ sich der Grenze π nähert, wenn z stets zunimmt.

Dritter Abschnitt.

Lineare Differentialgleichungen, welche durch Bessel'sche Functionen integrirt werden.

---

§. 27. Aufsuchung einer Function y von z derart, dass

$$\frac{\partial^2\left(z^m y^{-\frac{\nu}{2}} \overset{\nu}{J}(\sqrt{y})\right)}{\partial z^2} = f(z) \, . \, z^m \, . \, y^{-\frac{\nu}{2}} \overset{\nu}{J}(\sqrt{y}) \text{ wird.}$$

Die zu Ende des §. 4. abgeleitete Formel

$$\frac{\partial^{2m}\left(z^{\frac{m}{2}} \overset{m}{J}(\sqrt{z})\right)}{\partial z^{2m}} = (-1)^m \cdot \frac{z^{-\frac{m}{2}}}{2^{2m}} \overset{m}{J}(\sqrt{z}) \, ,$$

welche auch für Bessel'sche Functionen zweiter Art giltig bleibt, zeigt uns, dass es möglich ist, durch wiederholte Differentiation eines Ausdrucks, der eine Bessel'sche Function enthält, zu einem Ausdruck zu gelangen, der genau dieselbe Bessel'sche Function enthält. Es liegt nach dieser Bemerkung nahe, zu untersuchen, welche Function y von z man statt z in $\overset{\nu}{J}(\sqrt{z})$ einzusetzen habe, damit man durch wiederholte Differentiation wieder auf die nämliche Function J^ν zurückkomme.

Wir beschränken uns bei dieser Untersuchung auf 2malige Differentiation des Ausdrucks $z^m y^{-\frac{\nu}{2}} \overset{\nu}{J}(\sqrt{y})$ nach z und erhalten mit Anwendung der Grundformel (III.) zunächst:

$$\frac{\partial\left(z^m y^{-\frac{\nu}{2}} \overset{\nu}{J}(\sqrt{y})\right)}{\partial z} = -\tfrac{1}{2} z^m y^{-\frac{\nu+1}{2}} \overset{\nu+1}{J}(\sqrt{y}) \cdot \frac{\partial y}{\partial z}$$
$$+ m z^{m-1} y^{-\frac{\nu}{2}} \overset{\nu}{J}(\sqrt{y})$$

und nochmals differentiirend:

$$\frac{\partial^2\left(z^m y^{-\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{y})}\right)}{\partial z^2} = -\tfrac{1}{2} z^m y^{-\frac{\nu+1}{2}} J^{\nu+1}_{(\sqrt{y})} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial z^2}$$

$$+ \tfrac{1}{4} z^m y^{-\frac{\nu+2}{2}} J^{\nu+1}_{(\sqrt{y})} \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 - m z^{m-1} y^{-\frac{\nu+1}{2}} J^{\nu+1}_{(\sqrt{y})} \cdot \frac{\partial y}{\partial z}$$

$$+ m(m-1) z^{m-2} y^{-\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{y})}.$$

Nun ist aber nach (II.):

$$J^{\nu+2}_{(\sqrt{y})} = \frac{2\nu+2}{\sqrt{y}} J^{\nu+1}_{(\sqrt{y})} - J^{\nu}_{(\sqrt{y})},$$

folglich, wenn man diesen Werth in die vorige Gleichung einsetzt:

$$\frac{\partial^2\left(z^m y^{-\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{y})}\right)}{\partial z^2} = -\tfrac{1}{2} z^m \cdot y^{-\frac{\nu+1}{2}} J^{\nu+1}_{(\sqrt{y})} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial z^2}$$

$$+ \frac{\nu+1}{2} z^m y^{-\frac{\nu+3}{2}} J^{\nu+1}_{(\sqrt{y})} \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 - \tfrac{1}{4} z^m y^{-\frac{\nu+2}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{y})} \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2$$

$$- m z^{m-1} y^{-\frac{\nu+1}{2}} J^{\nu+1}_{(\sqrt{y})} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} + m(m-1) z^{m-2} y^{-\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{y})}.$$

Man hat demnach

$$(1.)\qquad \frac{\partial^2\left(z^m y^{-\frac{\nu}{2}} J^{\nu}_{(\sqrt{y})}\right)}{\partial z^2}$$

$$= \left[m(m-1) z^{m-2} - \frac{z^m}{4y}\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2\right] \cdot y^{-\frac{\nu}{2}} \cdot J^{\nu}_{(\sqrt{y})},$$

wenn man nur y als Function von z aus der Differentialgleichung

$$-\tfrac{1}{2} z^m y^{-\frac{\nu+1}{2}} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + \frac{\nu+1}{2} z^m y^{-\frac{\nu+3}{2}} \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 - m z^{m-1} y^{-\frac{\nu+1}{2}} \frac{\partial y}{\partial z} = 0$$

bestimmt hat.

In dieser Differentialgleichung, welche vereinfacht so lautet:

$$(2.)\qquad z y \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} - (\nu+1) z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + 2 m y \cdot \frac{\partial y}{\partial z} = 0,$$

setzen wir zunächst

$$\frac{\partial y}{\partial z} = u y \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = v y.$$

Sie geht dann über in

$$z v - (\nu+1) z u^2 + 2 m u = 0$$

und liefert

$$v = (\nu+1) u^2 - 2m \frac{u}{z},$$

während



$$u \frac{\partial y}{\partial z} + y \frac{\partial u}{\partial z} = v y$$

ist. Setzt man in letztere Gleichung $u y$ statt $\frac{\partial y}{\partial z}$, so wird sie

$$\frac{\partial u}{\partial z} + u^2 - v = 0$$

oder, nach Einführung des obigen Werthes von v:

$$\frac{\partial u}{\partial z} - \nu u^2 + 2m \frac{u}{z} = 0$$

oder auch

$$(3.) \qquad \frac{1}{u} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{2m}{z} - \nu u = 0 .$$

Nun setzen wir

$$z^{2m} u = w \qquad \text{und} \qquad z^{-\nu} = x$$

und erhalten

$$z^{2m} \frac{\partial u}{\partial z} + 2m z^{2m-1} u = \frac{\partial w}{\partial z}$$

oder, durch w beiderseits dividirend

$$(4.) \qquad \frac{1}{u} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{2m}{z} = \frac{1}{w} \cdot \frac{\partial w}{\partial z} .$$

Ferner ist

$$-\nu z^{-\nu-1} = \frac{\partial x}{\partial z} ,$$

d. h.

$$(5.) \qquad \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial x}{\partial z} = -\frac{\nu}{z} .$$

Eliminirt man nun mittelst der Gleichungen (4.) und (5.) $\frac{1}{u} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{2m}{z}$ und ν aus der Gleichung (3.), so wird diese:

$$\frac{1}{w} \cdot \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{zu}{x} \cdot \frac{\partial x}{\partial z} = 0 .$$

Da aber

$$z = x^{-\frac{1}{\nu}}$$

und

$$u = w x^{\frac{2m}{\nu}} ,$$

folglich

$$\frac{zu}{x} = w \, . \, x^{\frac{2m-\nu-1}{\nu}}$$

ist, so erhält man die Gleichung

$$\frac{1}{w} \cdot \frac{\partial w}{\partial z} + w x^{\frac{2m-\nu-1}{\nu}} \frac{\partial x}{\partial z} = 0 ,$$

welche in der Form

(6.) $$\frac{\partial w}{w^2} + x^{\frac{2m-\nu-1}{\nu}} \cdot \partial x = 0$$

unmittelbar integrirt werden kann. Man erhält durch ihre Integration, wenn man unter C eine willkührliche Constante versteht:

$$-\frac{1}{w} + \frac{\nu}{2m-1} x^{\frac{2m-1}{\nu}} = C.$$

Führen wir nun statt w und x wieder u und z zurück, so erhalten wir

$$u = -\frac{z^{-2m}}{C - \frac{\nu}{2m-1} z^{-2m+1}}$$

oder, weil

$$u = \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z}$$

ist:

$$\frac{\partial y}{y} = -\frac{z^{-2m} \partial z}{C - \frac{\nu}{2m-1} \cdot z^{-2m+1}}.$$

Diese Gleichung, integrirt, gibt

$$\log y = -\frac{1}{\nu} \log K \left(C - \frac{\nu}{2m-1} \cdot z^{-2m+1}\right),$$

wo K eine zweite willkührliche Constante bedeutet. Setzt man

$$CK = a \qquad \text{und} \qquad -\frac{\nu K}{2m-1} = b,$$

so dass jetzt a und b die beiden willkührlichen Constanten vorstellen, so hat man endlich

(7.) $$y = (a + b z^{-2m+1})^{-\frac{1}{\nu}}.$$

Substituirt man nun diese Function statt y in obige Gleichung (1.), so erhält man

(8.) $$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[z^m (a + b z^{-2m+1})^{\frac{1}{2}} J^\nu (a + b z^{-2m+1})^{-\frac{1}{2\nu}} \right]$$

$$= \left\{ m(m-1) z^{m-2} - b^2 \left(\frac{2m-1}{2\nu}\right)^2 z^{-3m} (a + b z^{-2m+1})^{-\frac{2\nu+1}{\nu}} \right\}$$

$$\times (a + b z^{-2m+1})^{\frac{1}{2}} J^\nu (a + b z^{-2m+1})^{-\frac{1}{2\nu}}.$$

Zu der nämlichen Gleichung würde man gelangen, wenn man unter Anwendung von Formel (IV.) den Ausdruck

$$\frac{\partial^2 \left(z^m y^{\frac{\nu}{2}} J^\nu_{(\sqrt{y})}\right)}{\partial z^2}$$

auf analoge Weise behandeln würde.

Setzt man in (8.) $a = 0$, $b = 1$, so erhält man specieller

$$(9.)\quad \frac{\partial^2\left(\sqrt{z}\,.\,J^\nu\left(z^{\frac{2m-1}{2\nu}}\right)\right)}{\partial z^2}$$

$$= \left\{m(m-1)\,z^{m-2} - \left(\frac{2m-1}{2\nu}\right)^2 z^{\frac{m(\nu+2)-(2\nu+1)}{\nu}}\right\} z^{-m}\cdot\sqrt{z}\,.\,J^\nu\left(z^{\frac{2m-1}{2\nu}}\right)$$

und daraus wieder noch specieller für $m = 0$:

$$(10.)\quad \frac{\partial^2\left(\sqrt{z}\,.\,J^\nu\left(z^{-\frac{1}{2\nu}}\right)\right)}{\partial z^2} = -\frac{z^{-\frac{2\nu+1}{\nu}}}{(2\nu)^2}\cdot\sqrt{z}\cdot J^\nu\left(z^{-\frac{1}{2\nu}}\right)$$

und für $m = 1$:

$$(11.)\quad \frac{\partial^2\left(\sqrt{z}\,.\,J^\nu\left(z^{\frac{1}{2\nu}}\right)\right)}{\partial z^2} = -\frac{z^{\frac{1-2\nu}{\nu}}}{(2\nu)^2}\cdot\sqrt{z}\cdot J^\nu\left(z^{\frac{1}{2\nu}}\right).$$

§. 28. Fortsetzung.

Wenn $m = \frac{1}{2}$ gesetzt wird, so liefert der für y gefundene Ausdruck: $y =$ Const., ein bloss particuläres Integral der zu integrirenden Differentialgleichung. Behandelt man aber in diesem Falle die Gleichung

$$(1.)\quad zy\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} - (\nu+1)\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + y\cdot\frac{\partial y}{\partial z} = 0$$

ganz wie oben, so erhält man zwischen w und x die Gleichung

$$\frac{\partial w}{w^2} + \frac{\partial x}{x} = 0,$$

woraus sofort

$$-\frac{1}{w} + \log x = C$$

hervorgeht. Da nun

$$w = zu \qquad x = z^{-\nu}$$

ist, so folgt weiter

$$-\frac{1}{zu} = C + \nu\log z,$$

d. i.

$$u = -\frac{\frac{1}{z}}{C+\nu\log z}$$

oder

$$\frac{\partial y}{y} = -\frac{\frac{\partial z}{z}}{C+\nu\log z},$$

woraus sofort

$$\log y = -\frac{1}{\nu} \log K \ (C + \nu \log z)$$

oder

(2.) $$y = (a + b \log z)^{-\frac{1}{\nu}}$$

folgt, wo jetzt a und b die beiden willkührlichen Constanten sind. Dann ist weiter

$$\frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{b}{\nu z} (a + b \log z)^{-\frac{\nu+1}{\nu}}$$

und

$$\frac{z^m}{4y} \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 = \frac{b^2}{4\nu^2 z^{\frac{3}{2}}} (a + b \log z)^{-\frac{2\nu+1}{\nu}}.$$

Substituirt man diesen Werth nebst dem obigen Werthe von y in die Gleichung (1.) des vorhergehenden Paragraphen, so hat man:

(3.) $$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(z^{\frac{1}{2}} (a + b \log z)^{\frac{1}{2}} J^\nu (a + b \log z)^{-\frac{1}{2\nu}}\right)$$

$$= -\left\{1 + \frac{b^2}{\nu^2} (a + b \log z)^{-\frac{2\nu+1}{\nu}}\right\} \frac{z^{\frac{1}{2}} (a + b \log z)^{\frac{1}{2}}}{4z^2} J^\nu (a + b \log z)^{-\frac{1}{2\nu}}.$$

Setzt man darin speciell $\nu = -\frac{1}{2}$, so wird sie:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\sqrt{z(a + b \log z)}\, J^{-\frac{1}{2}} (a + b \log z)\right)$$

$$= -(1 + 4b^2) \frac{\sqrt{z(a + b \log z)}}{4z^2} J^{-\frac{1}{2}} (a + b \log z)$$

oder, weil nach §. 4.:

$$J_{(z)}^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cdot \cos z$$

ist:

(4.) $$\frac{\partial^2 (\sqrt{z} \,.\, \cos (a + b \log z))}{\partial z^2} = -\frac{1 + 4b^2}{4z^2} \cdot \sqrt{z} \cdot \cos (a + b \log z).$$

Für $\nu = 0$ werden sämmtliche bisher gegebenen Integrale unserer Differentialgleichung (2.) des vorigen Paragraphen unzulässig. Alsdann aber wird dieselbe

(5.) $$z y \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} - z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + 2\mu y \cdot \frac{\partial y}{\partial z} = 0$$

und man erhält zwischen u und z die ohne Weiteres integrable Gleichung

$$\frac{\partial u}{u} + 2\mu \frac{\partial z}{z} = 0,$$

woraus sofort

$$u = C z^{-2\mu}$$

hervorgeht. Dann ist ferner

$$\frac{\partial y}{y} = C z^{-2\mu} \partial z,$$

folglich

$$\log y = C \cdot \frac{z^{-2\mu+1}}{-2\mu+1} + C'$$

oder

(6.) $$y = K e^{k z^{-2\mu+1}},$$

wo K und k die willkührlichen Constanten sind. Man erhält nun, wenn man $k = \log a$ und $K^{\frac{1}{2}} = b$ setzt:

(7.) $$\frac{\partial^2 \left(z^\mu J^0 \left(b a^{\frac{1}{2} z^{-2\mu+1}}\right)\right)}{\partial z^2}$$

$$= \left\{ \frac{\mu(\mu-1)}{z^2} - \frac{(b \log a)^2 (2\mu-1)^2}{4 z^{4\mu}} a^{z^{-2\mu+1}} \right\} z^\mu J^0 \left(b a^{\frac{1}{2} z^{-2\mu+1}}\right).$$

Speciell ergibt sich für $b = 1$ und $\mu = 0$, und wenn a^2 statt a gesetzt wird:

(8.) $$\frac{\partial^2 J^0(a^z)}{\partial z^2} = -(\log a)^2 \cdot a^{2z} J^0(a^z)$$

und ebenso für $b = 1$ und $\mu = 1$:

(9.) $$\frac{\partial^2 \left(z J^0 \left(a^{\frac{1}{z}}\right)\right)}{\partial z^2} = -\frac{(\log a)^2}{z^4} a^{\frac{2}{z}} \cdot z \cdot J^0 \left(a^{\frac{1}{z}}\right).$$

Sämmtliche in diesem und dem vorigen Paragraphen abgeleiteten Gleichungen gelten, wenn ν Null oder positiv ganz ist, nicht nur für J^m, sondern ebenso gut auch für die Bessel'sche Function zweiter Art Y^m.

§. 29. Die Bessel'sche Differentialgleichung.

Zufolge Gleichung (3. §. 2.) ist

(1.) $$\frac{\partial J^\nu_{(z)}}{\partial z} = \frac{\nu}{z} J^\nu_{(z)} - J^{\nu+1}_{(z)}.$$

Differentiirt man diese Gleichung nochmals nach z, so erhält man

$$\frac{\partial^2 J^\nu_{(z)}}{\partial z^2} = \frac{\nu}{z} \cdot \frac{\partial J^\nu_{(z)}}{\partial z} - \frac{\nu}{z^2} J^\nu_{(z)} - \frac{\partial J^{\nu+1}_{(z)}}{\partial z}$$

oder, wenn man auf die hier vorkommenden ersten Differentialquotienten die Gleichung (1.) anwendet:

$$\frac{\partial^2 J_{(z)}^{\nu}}{\partial z^2} = \frac{\nu^2}{z^2} J_{(z)}^{\nu} - \frac{\nu}{z} J_{(z)}^{\nu+1} - \frac{\nu}{z^2} J_{(z)}^{\nu} - \frac{\nu+1}{z} J_{(z)}^{\nu+1} + J_{(z)}^{\nu+2}.$$

Addirt man zu letzterer die mit z dividirte Gleichung (1.), nämlich

$$\frac{1}{z} \frac{\partial J_{(z)}^{\nu}}{\partial z} = \frac{\nu}{z^2} J_{(z)}^{\nu} - \frac{1}{z} J_{(z)}^{\nu+1},$$

so kommt

$$\frac{\partial^2 J_{(z)}^{\nu}}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \cdot \frac{\partial J_{(z)}^{\nu}}{\partial z} = \frac{\nu^2}{z^2} J_{(z)}^{\nu} - \frac{2(\nu+1)}{z} J_{(z)}^{\nu+1} + J_{(z)}^{\nu+2}.$$

Nach (II.) ist aber

$$\frac{2(\nu+1)}{z} J_{(z)}^{\nu+1} - J_{(z)}^{\nu+2} = J_{(z)}^{\nu},$$

folglich lautet obige Gleichung

$$(2.) \qquad \frac{\partial^2 J_{(z)}^{\nu}}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \cdot \frac{\partial J_{(z)}^{\nu}}{\partial z} + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) J_{(z)}^{\nu} = 0$$

und drückt in dieser Form eine Beziehung aus, welche zwischen jeder Bessel'schen Function und ihren beiden ersten Differentialquotienten stattfindet. Setzen wir nun in dieser Gleichung $J_{(z)}^{\nu} = y$, so wird sie

$$(3.) \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) y = 0$$

und ist keine andere als die Bessel'sche Differentialgleichung, jedoch insofern verallgemeinert, als wir unter ν jede beliebige reelle Zahl, also nicht bloss positive ganze Zahlen, verstehen.

Ein particuläres Integral derselben ist nun

$$y = J_{(z)}^{\nu}$$

und da die Gleichung (3.) ungeändert bleibt, wenn wir $-\nu$ statt ν setzen, so ist auch

$$y = J_{(z)}^{-\nu}$$

ein particuläres Integral.

Die vollständige Lösung der Bessel'schen Differentialgleichung lautet demnach (im Allgemeinen):

$$(4.) \qquad y = A J_{(z)}^{\nu} + B J_{(z)}^{-\nu},$$

wo A und B die zwei willkührlichen Constanten vorstellen.

Die Gleichung (4.) liefert so lange das vollständige Integral unserer Differentialgleichung, als ν nicht positiv oder negativ ganz oder Null ist. Ist nämlich ν ganz und zwar $= n$, so reducirt sich, weil in diesem Falle

$$J_{(z)}^{-n} = (-1)^n J_{(z)}^n$$

ist, die Gleichung (4.) auf die blos particuläre Lösung

$$y = (A + (-1)^n B) J_{(z)}^n = C J_{(z)}^n .$$

Da aber unsere Gleichung (2.) bloss mit Zuhilfenahme solcher Relationen abgeleitet wurde, welche, für ein ganzzahliges ν, auch für die Bessel'sche Function zweiter Art statthaben, so ist auch

$$y = Y_{(z)}^n$$

in diesem Falle ein particuläres Integral der Differentialgleichung (3.).

Ist also ν Null oder positiv oder negativ ganz, $(= n)$, so ist

(5.) $$y = A J_{(z)}^n + B Y_{(z)}^n$$

das vollständige Integral der Bessel'schen Differentialgleichung.

An diese Integration der Bessel'schen Gleichung lassen sich verschiedene Betrachtungen knüpfen. Zuerst zeigt sie uns, dass die gleich Eingangs vorgenommene Erweiterung des Begriffs der Bessel'schen Function durch Zulassung auch gebrochener Exponenten kein willkührlicher Act, sondern eine in der Natur der Sache begründete Nothwendigkeit war. Durch die Bessel'sche Function erster Art mit gebrochenem Exponenten ist eine bei der Integration der Gleichung (3.) (und anderer Differentialgleichungen, wie sich in der Folge zeigen wird) offen gelassene Lücke ausgefüllt.

Sodann zeigt uns dieses Integrationsverfahren, dass es eine Bessel'sche Function zweiter Art mit gebrochenem Index nicht geben kann. Denn existirte eine solche, so würden nicht nur $J_{(z)}^\nu$ und $J_{(z)}^{-\nu}$, sondern auch $Y_{(z)}^\nu$ und $Y_{(z)}^{-\nu}$ particuläre Integrale der Gleichung (3.) sein, und man könnte für diese Differentialgleichung zweiter Ordnung ein Integral

$$A J_{(z)}^\nu + B J_{(z)}^{-\nu} + C Y_{(z)}^\nu + D Y_{(z)}^{-\nu}$$

mit vier willkührlichen Constanten angeben, was offenbar unmöglich ist.

Drittens lässt sich, wenn $J_{(z)}^\nu$ als particuläre Lösung unserer Differentialgleichung bekannt ist, auf folgendem bekannten Wege noch eine zweite particuläre Lösung hinzufinden. Wir setzen in (3.)

$$y = J_{(z)}^{\nu} \int \varphi(z) \, . \, dz$$

und erhalten zur Bestimmung von φ folgende Gleichung

$$J_{(z)}^{\nu} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \left(2 \cdot \frac{\partial J_{(z)}^{\nu}}{\partial z} + \frac{1}{z} \cdot J_{(z)}^{\nu}\right) . \varphi = 0 \,,$$

woraus sich sofort

$$\varphi(z) = \frac{\gamma}{z \left(J_{(z)}^{\nu}\right)^2}$$

und dann

$$y = \gamma \, J_{(z)}^{\nu} \int \frac{dz}{z \left(J_{(z)}^{\nu}\right)^2}$$

ergibt, wo γ eine Constante ist. Da diese Lösung mit den bereits gefundenen nothwendig übereinstimmen muss, so müssen folgende Beziehungen stattfinden, nämlich, wenn ν gebrochen ist

$$\alpha \, J_{(z)}^{\nu} + \beta \, J_{(z)}^{-\nu} = \gamma \, J_{(z)}^{\nu} \int \frac{dz}{z \left(J_{(z)}^{\nu}\right)^2} \tag{6.}$$

und ferner, wenn ν ganz $(=n)$ oder Null ist:

$$\alpha \, J_{(z)}^{n} + \beta \, Y_{(z)}^{n} = \gamma \, J_{(z)}^{n} \int \frac{dz}{z \left(J_{(z)}^{n}\right)^2} \,. \tag{7.}$$

Viertens werde in Gleichung (3.) z so gross gedacht, dass $\frac{\nu^2}{z^2}$ gegen 1 vernachlässigt werden kann. Dann lautet die Gleichung, was auch ν sein mag, wie folgt:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial y}{\partial z} + y = 0$$

und kann jetzt leicht in folgender Weise geschrieben werden*):

$$\frac{\partial^2 (y \sqrt{z})}{\partial z^2} + \left(1 + \frac{1}{4 z^2}\right) y \sqrt{z} = 0 \,.$$

Unter der oben gemachten Voraussetzung verschwindet aber auch $\frac{1}{4 z^2}$ gegen 1, und die Gleichung reducirt sich auf

$$\frac{\partial^2 (y \sqrt{z})}{\partial z^2} + y \sqrt{z} = 0$$

und liefert integrirt

$$y \sqrt{z} = \alpha \cos z + \beta \sin z \,.$$

Dieses Integral muss nun, für äusserst grosse Werthe von z, mit den bereits gegebenen, für jedes z giltigen, übereinstimmen.

Man hat daher, für ein gebrochenes ν und ein äusserst grosses z

*) Poisson, Journal de l'école polyt. Cah. XIX. S. 350.

(8.) $$A\, J_{(z)}^{\nu} + B\, J_{(z)}^{-\nu} = \frac{\alpha \cos z + \beta \sin z}{\sqrt{z}}$$

und für ein ganzes ν und ein äusserst grosses z

(9.) $$A\, J_{(z)}^{n} + B\, Y_{(z)}^{n} = \frac{\alpha \cos z + \beta \sin z}{\sqrt{z}}.$$

Wir ersehen daraus, dass für äusserst grosse Werthe von z die Bessel'sche Function sowohl erster als zweiter Art durch die Form

$$\frac{\alpha \cos z + \beta \sin z}{\sqrt{z}}$$

darstellbar ist, was uns übrigens durch die Gleichungen (11. §. 17.) und (6. §. 26.) bereits bekannt ist.

Schliesslich sei es noch gestattet, die hier ganz allgemein gelehrte Integration der Bessel'schen Differentialgleichung in einigen speciellen Fällen durchzuführen, namentlich um den dabei vorkommenden Gebrauch unserer Formel (V. §. 4.) zu zeigen.

Es sei zuerst $\nu = \frac{5}{4}$, so liefert die Gleichung (4.) sofort das vollständige Integral

$$y = A\, J_{(z)}^{\frac{5}{4}} + B\, J_{(z)}^{-\frac{5}{4}}.$$

Aus V. aber folgt, wenn daselbst $\nu = -\frac{5}{4}$ und $m = 2$ gesetzt wird:

$$J_{(z)}^{-\frac{5}{4}} = J_{(z)}^{\frac{11}{4}} - \frac{3}{z}\, J_{(z)}^{\frac{7}{4}} - \frac{3}{4 z^3}\, J_{(z)}^{\frac{3}{4}}.$$

Demnach ist

(10.) $$y = A\, J_{(z)}^{\frac{5}{4}} + B\left(J_{(z)}^{\frac{11}{4}} - \frac{3}{z}\, J_{(z)}^{\frac{7}{4}} - \frac{3}{4 z^2}\, J_{(z)}^{\frac{3}{4}}\right)$$

die vollständige Lösung der Differentialgleichung

(11.) $$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} + \left[1 - \left(\frac{5}{4z}\right)^2\right] . y = 0.$$

Ferner sei, um ein sehr einfaches Beispiel zu wählen, $\nu = \frac{1}{2}$, das vollständige Integral sonach

$$y = A\, J_{(z)}^{\frac{1}{2}} + B\, J_{(z)}^{-\frac{1}{2}},$$

so ist gemäss (V.) für $\nu = -\frac{1}{2}$ und $m = 1$

$$J_{(z)}^{-\frac{1}{2}} = -J_{(z)}^{\frac{3}{2}} + \frac{J_{(z)}^{\frac{1}{2}}}{z}.$$

Nach (§. 16.) aber ist

$$J_{(z)}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cdot \sin z$$

$$J_{(z)}^{\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(\frac{\sin z}{z} - \cos z\right),$$

folglich

$$J_{(z)}^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cdot \cos z$$

und demnach entspricht

$$(12.) \qquad y = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \, (A \sin z + B \cos z)$$

als vollständiges Integral der Gleichung

$$(13.) \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} + \left(1 - \frac{1}{4 z^2}\right) y = 0 .$$

Zu dem nämlichen Resultate wäre man übrigens auch gelangt, indem man Gebrauch gemacht hätte von der Bemerkung des §. 16, dass die beiden dort vorkommenden Functionen $R_{(z)}^{m+\frac{1}{2}}$ und $(-1)^m \, . \, R_{(-z)}^{m+\frac{1}{2}}$ jede für sich den Fundamentalgesetzen der Bessel'schen Functionen gehorchen. Dann muss auch jede für sich der Bessel'schen Differentialgleichung, welche wir aus jenen Grundgesetzen abgeleitet haben, genügen, d. h. jede muss ein particuläres Integral derselben sein. Für $m = 0$ aber ist

$$R_{(z)}^{\frac{1}{2}} = - i \cdot \frac{e^{iz}}{\sqrt{2 \pi z}} \qquad \text{und} \qquad R_{(-z)}^{\frac{1}{2}} = - \frac{e^{-iz}}{\sqrt{2 \pi z}} ,$$

folglich hat man für die Gleichung (13.) das vollständige Integral

$$y = \frac{1}{\sqrt{2 \pi z}} \, (a e^{iz} + b e^{-iz})$$

oder

$$y = \frac{1}{\sqrt{2 \pi z}} \, \big((a+b) \cos z + (a-b) i \, . \sin z\big)$$

oder endlich, wenn man $(a-b) i = 2 A$, $a+b = 2 B$ setzt:

$$y = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \, (A \sin z + B \cos z) ,$$

genau wie oben.

§. 30. Die Gleichung $z \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + a \frac{\partial y}{\partial z} \pm \frac{1}{4} y = 0$.

Wir gehen aus von der Gleichung

$$J_{(\sqrt{z})}^{\nu+2} = \frac{2(\nu+1)}{\sqrt{z}} \, J_{(\sqrt{z})}^{\nu+1} - J_{(\sqrt{z})}^{\nu}$$

und multipliciren dieselbe beiderseits mit $z^{-\frac{\nu+2}{2}}$. Dann heisst sie

$$z^{-\frac{\nu+2}{2}} \, J_{(\sqrt{z})}^{\nu+2} = \frac{2(\nu+1)}{z} \, z^{-\frac{\nu+1}{2}} \, J_{(\sqrt{z})}^{\nu+1} - \frac{1}{z} \, . \, z^{-\frac{\nu}{2}} \, J_{(\sqrt{z})}^{\nu}$$

und kann jetzt, weil

$$z^{-\frac{\nu+2}{2}} \overset{\nu+2}{J}(\sqrt{z}) = 4 \cdot \frac{\partial^2 \left(z^{-\frac{\nu}{2}} \overset{\nu}{J}(\sqrt{z})\right)}{\partial z^2}$$

und

$$z^{-\frac{\nu+1}{2}} \overset{\nu+1}{J}(\sqrt{z}) = -2 \cdot \frac{\partial \left(z^{-\frac{\nu}{2}} \overset{\nu}{J}(\sqrt{z})\right)}{\partial z}$$

ist, auch in folgender Form geschrieben werden:

$$(1.)\ \frac{\partial^2 \left(z^{-\frac{\nu}{2}} \overset{\nu}{J}(\sqrt{z})\right)}{\partial z^2} + \frac{\nu+1}{z} \cdot \frac{\partial \left(z^{-\frac{\nu}{2}} \overset{\nu}{J}(\sqrt{z})\right)}{\partial z} + \frac{1}{z} \cdot z^{-\frac{\nu}{2}} \overset{\nu}{J}(\sqrt{z}) = 0.$$

Multipliciren wir dagegen die Gleichung

$$\overset{\nu}{J}(\sqrt{z}) = \frac{2(\nu-1)}{\sqrt{z}} \overset{\nu-1}{J}(\sqrt{z}) - \overset{\nu-2}{J}(\sqrt{z})$$

mit $z^{\frac{\nu}{2}}$, so dass sie die Form

$$z^{\frac{\nu}{2}} \overset{\nu}{J}(\sqrt{z}) = 2(\nu-1)\, z^{\frac{\nu-1}{2}} \overset{\nu-1}{J}(\sqrt{z}) - z \cdot z^{\frac{\nu-2}{2}} \overset{\nu-2}{J}(\sqrt{z})$$

annimmt, und berücksichtigen, dass

$$z^{\frac{\nu-2}{2}} \overset{\nu-2}{J}(\sqrt{z}) = 4\, \frac{\partial^2 \left(z^{\frac{\nu}{2}} \overset{\nu}{J}(\sqrt{z})\right)}{\partial z^2}$$

und

$$z^{\frac{\nu-1}{2}} \overset{\nu-1}{J}(\sqrt{z}) = 2 \cdot \frac{\partial \left(z^{\frac{\nu}{2}} \overset{\nu}{J}(\sqrt{z})\right)}{\partial z}$$

ist, so erhalten wir

$$(2.)\quad z \cdot \frac{\partial^2 \left(z^{\frac{\nu}{2}} \overset{\nu}{J}(\sqrt{z})\right)}{\partial z^2} - (\nu-1)\, \frac{\partial \left(z^{\frac{\nu}{2}} \overset{\nu}{J}(\sqrt{z})\right)}{\partial z} + z^{\frac{\nu}{2}} \overset{\nu}{J}(\sqrt{z}) = 0\,.$$

Setzen wir nun in (1.) $z^{-\frac{\nu}{2}} \overset{\nu}{J}(\sqrt{z}) = y$ und $\nu + 1 = a$, so erhalten wir die Differentialgleichung

$$(3.)\qquad z \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + a \cdot \frac{\partial y}{\partial z} + \tfrac{1}{4}\, y = 0$$

sammt ihrem particulären Integral

$$y = z^{-\frac{a-1}{2}} \overset{a-1}{J}(\sqrt{z})\,.$$

Setzen wir ebenso in (2.) $z^{\frac{\nu}{2}} \overset{\nu}{J}(\sqrt{z}) = y$ und $-\nu + 1 = a$, so ergibt sich die nämliche Differentialgleichung (3.) nebst ihrem particulären Integral:

$$y = z^{-\frac{a-1}{2}} \overset{1-a}{J}(\sqrt{z}) .$$

Wir erhalten daher das vollständige Integral der obigen Differentialgleichung in folgender Gestalt

(4.) $$y = z^{-\frac{a-1}{2}} \left(A \overset{a-1}{J}(\sqrt{z}) + B \overset{1-a}{J}(\sqrt{z}) \right)$$

so lange a gebrochen ist. Ist dagegen a Null oder positiv oder negativ ganz, so reducirt sich aus bekannten Gründen vorstehende Lösung auf eine blos particuläre. Alsdann tritt aber, wie bei der Bessel'schen Gleichung, die Function Y^m in die Bresche und liefert das zweite particuläre Integral

$$y = z^{-\frac{a-1}{2}} \overset{a-1}{Y}(\sqrt{z}) ,$$

indem ja, bei ganzem v, die Gleichungen (1.) und (2.) für die Function Y^m ebenso gut gelten als für J^m, weil sie nur aus solchen Prämissen hergeleitet wurden, die für beide Arten Bessel'scher Functionen in gleicher Weise stattfinden.

Ist daher in der Differentialgleichung (3.) a eine ganze Zahl oder Null, so genügt ihr als vollständiges Integral

(5.) $$y = z^{-\frac{a-1}{2}} \left(A \overset{a-1}{J}(\sqrt{z}) + B \overset{a-1}{Y}(\sqrt{z}) \right).$$

Vertauscht man in Gleichung (3.) z mit $-z$, so wird sie zu

(6.) $$z \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + a \frac{\partial y}{\partial z} - \tfrac{1}{4} y = 0 .$$

und ihre Integrale lauten, wenn a gebrochen:

(7.) $$y = z^{-\frac{a-1}{2}} \left(A \overset{a-1}{J}(i\sqrt{z}) + B \overset{1-a}{J}(i\sqrt{z}) \right),$$

dagegen, wenn a ganz oder Null ist:

(8.) $$y = z^{-\frac{a-1}{2}} \left(A \overset{a-1}{J}(i\sqrt{z}) + B \overset{a-1}{Y}(i\sqrt{z}) \right).$$

Die im gegenwärtigen Paragraphen behandelte Differentialgleichung bietet darum ein ganz besonderes Interesse dar, weil sich die Lösungen verschiedener Probleme aus der Mechanik und aus der theoretischen Physik auf sie zurückführen lassen. Man gelangt zu derselben bei Bestimmung der Wellenbewegung des Wassers in einem cylindrischen Gefäss von sehr grossem Radius. Denkt man sich ferner einen Rotationskörper längs seiner Rotationsaxe erwärmt, während seine Oberfläche auf einer constanten Temperatur erhalten wird, so gibt die nämliche Gleichung die Vertheilung der

Temperatur in jedem Punkte dieses Körpers. Bei der Bestimmung des durch eine unendlich weit entfernte magnetische Masse in einem weichen Eisencylinder inducirten Magnetismus wird man ebenfalls zu dieser Differentialgleichung geführt*).

Die hier gegebenen Integrale, ebenso einfach als umfassend, lassen, wie ich glaube, nach keiner Richtung hin etwas zu wünschen übrig.

§. 31. Die Riccati'sche Gleichung.

Wir machen jetzt Gebrauch von den Resultaten des §. 27., indem wir in Gleichung (10.) daselbst

$$\sqrt{z}\, J^{\nu}\left(z^{-\frac{1}{2\nu}}\right) = y$$

setzen. Sie wird dann zunächst

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + \frac{z^{-\frac{2\nu+1}{\nu}}}{(2\nu)^2} \cdot y = 0$$

oder, wenn man $z = px$ einführt:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{p^{-\frac{1}{\nu}}}{(2\nu)^2} \cdot x^{-\frac{2\nu+1}{\nu}} \cdot y = 0\,.$$

Macht man jetzt

$$\frac{p^{-\frac{1}{\nu}}}{(2\nu)^2} = 1\,, \qquad \text{d. h.} \qquad p = (2\nu)^{-2\nu}\,,$$

so wird sie

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + x^{-\frac{2\nu+1}{\nu}} \cdot y = 0$$

und ihr genügt

$$y = (2\nu)^{-\nu} \sqrt{x}\,.\, J^{\nu}\left(2\nu x^{-\frac{1}{2\nu}}\right).$$

Setzt man jetzt noch

$$-\frac{2\nu+1}{\nu} = k\,, \qquad \text{folglich} \qquad \nu = -\frac{1}{k+2}$$

und bedenkt, dass

$$J^{\nu}_{(-z)} = (-1)^{\nu}\,.\, J^{\nu}_{(z)}$$

ist, so ergibt sich

$$y = \left(\frac{2}{k+2}\right)^{\frac{1}{k+2}} .\, \sqrt{x}\,.\, J^{-\frac{1}{k+2}}\left(\frac{2}{k+2}\, x^{\frac{k+2}{2}}\right)$$

---

*) Kirchhoff, Crelle's Journ. Bd. 48.

und darum auch

(2.) $$y = \sqrt{x} \,.\, J^{\frac{1}{k+2}}\left(\frac{2}{k+2}\, x^{\frac{k+2}{2}}\right)$$

als particuläres Integral der Gleichung

(1.) $$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + x^k y = 0,$$

welche keine andere, als die bekannte Riccati'sche ist.

Verfährt man ebenso mit der Gleichung (11. §. 27.), so wird sie, indem man

$$\sqrt{z} \,.\, J^{\nu}\left(z^{\frac{1}{2\nu}}\right) = y$$

setzt, zunächst:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + \frac{z^{\frac{1-2\nu}{\nu}}}{(2\nu)^2} \cdot y = 0 \,.$$

Macht man nun wieder $z = px$, sodann $\frac{p^{\frac{1}{\nu}}}{(2\nu)^2} = 1$, also $p = (2\nu)^{2\nu}$, und endlich $\frac{1-2\nu}{\nu} = k$, woraus $\nu = \frac{1}{k+2}$ folgt, so hat man

$$y = \left(\frac{2}{k+2}\right)^{\frac{1}{k+2}} \sqrt{x} \,.\, J^{\frac{1}{k+2}}\left(\frac{2}{k+2}\, x^{\frac{k+2}{2}}\right)$$

und deshalb auch

(3.) $$y = \sqrt{x} \,.\, J^{\frac{1}{k+2}}\left(\frac{2}{k+2} \cdot x^{\frac{k+2}{2}}\right)$$

als zweites particuläres Integral der Gleichung (1.).

Das vollständige Integral der Riccati'schen Differentialgleichung

(1.) $$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + x^k y = 0$$

lautet demnach

(4.) $$y = \sqrt{x}\left(A\, J_{(\xi)}^{\frac{1}{k+2}} + B\, J_{(\xi)}^{-\frac{1}{k+2}}\right),$$

worin

$$\xi = \frac{2}{k+2}\, x^{\frac{k+2}{2}}$$

zu nehmen ist, mit der Bedingung jedoch, dass $\frac{1}{k+2}$ eine gebrochene Zahl sei.

Ist nämlich $\frac{1}{k+2}$ eine ganze Zahl, so fallen vermöge der Gleichung

$$J_{(z)}^{-n} = (-1)^n J_{(z)}^n$$

die beiden particulären Integrale (2.) und (3.) in ein einziges zusammen; da aber bei ganzzahligem ν die Gleichungen (10.) und (11.) des §. 27. auch für die Bessel'sche Function zweiter Art stattfinden, so hat man in gegenwärtigem Falle

$$(5.) \qquad y = \sqrt{x} \,.\, Y^{\frac{1}{k+2}}\left(\frac{2}{k+2} \cdot x^{\frac{k+2}{2}}\right)$$

als zweites particuläres Integral der Gleichung (1.).

Ist demnach $\frac{1}{k+2}$ positiv oder negativ ganz, so genügt

$$(6.) \qquad y = \sqrt{x} \left(A\, J_{(\xi)}^{\frac{1}{k+2}} + B\, Y_{(\xi)}^{\frac{1}{k+2}}\right),$$

worin

$$\xi = \frac{2}{k+2} \cdot x^{\frac{k+2}{2}}$$

ist, als vollständiges Integral der Riccati'schen Gleichung

$$(1.) \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + x^k y = 0\,.$$

Die Integrale (4.) und (6.) umfassen alle möglichen Fälle, mit Ausnahme eines einzigen, nämlich wenn $k = -2$ ist. Alsdann aber lässt sich die Gleichung

$$(7.) \qquad x^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + y = 0\,,$$

in welche die Riccati'sche jetzt übergeht, leicht mit Hilfe der Gleichung (4. §. 28.), d. i.

$$\frac{\partial^2 (\sqrt{z} \cos(a+b\log z))}{\partial z^2} = -\frac{1+4b^2}{4z^2}\sqrt{z} \,.\, \cos(a+b\log z)$$

integriren.

Setzt man nämlich hierin

$$y = \sqrt{z} \,.\, \cos(a+b\log z)\,,$$

so wird sie zu

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + \frac{1+4b^2}{4z^2}\, y = 0\,,$$

worin man nur b aus der Gleichung

$$\frac{1+4b^2}{4} = 1$$

zu bestimmen braucht, um sie in die Form (7.) überzuführen. Daraus ergibt sich aber

$$b = \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

und es ist demnach, wenn man x statt z schreibt

$$y = \sqrt{x} \, . \cos\left(a \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\log x\right)$$

ein particuläres Integral der Gleichung (7.). Die Grösse a ist darin vollkommen willkührlich; setzen wir dieselbe zuerst $= 0$, dann $= \frac{1}{2}\pi$, so erhalten wir daraus folgende zwei speciellere particuläre Integrale

$$y = \sqrt{x} \, . \cos\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{3} \, . \log x\right)$$

und

$$y = \sqrt{x} \, . \sin\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\log x\right),$$

welche übrigens zusammen, wie man unmittelbar einsieht, die obige anscheinend allgemeinere particuläre Lösung vollkommen ersetzen.

Wir haben demnach als vollständiges Integral der Gleichung

(7.) $$x^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + y = 0$$

den Ausdruck

(8.) $$y = \sqrt{x}\left(A\cos\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\log x\right) + B\sin\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\log x\right)\right).$$

Was nun ferner die Gleichung

(1.a.) $$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - x^k y = 0$$

anlangt, so lässt sich dieselbe ganz ebenso wie (1.) aus den Gleichungen (10.) und (11.) des §. 27. herleiten, mit dem einzigen Unterschiede, dass man bei Gleichung (10.) $\frac{p^{-\frac{1}{\nu}}}{(2\nu)^2} = -1$, also $p = (-1)^\nu (2\nu)^{-2\nu}$, bei Gleichung (11.) dagegen $\frac{p^{\frac{1}{\nu}}}{(2\nu)^2} = -1$, d. h. $p = (-1)^\nu (2\nu)^{2\nu}$, zu setzen hat. Für die Gleichung (1.a.) gelten alsdann die nämlichen Integrale (4.) und (6.) und unter den nämlichen Bedingungen, nur muss jetzt $\xi = \frac{2i}{k+2} x^{\frac{k+2}{2}}$ genommen werden. Wir können daher aussprechen:

Das vollständige Integral der Riccati'schen Gleichung

(1.a.) $$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - x^k y = 0$$

lautet entweder

(4.a.) $$y = \sqrt{x}\left(A\, J_{(\xi)}^{\frac{1}{k+2}} + B\, J_{(\xi)}^{-\frac{1}{k+2}}\right)$$

oder

$$(6.a.)\qquad y = \sqrt{x}\left(A\, J_{(\xi)}^{\frac{1}{k+2}} + B\, Y_{(\xi)}^{\frac{1}{k+2}}\right),$$

je nachdem $\frac{1}{k+2}$ eine gebrochene oder eine ganze Zahl ist; dabei ist

$$\xi = \frac{2i}{k+2} \cdot x^{\frac{k+2}{2}}$$

zu nehmen.

Hat man es mit dem Ausnahmsfall $k = -2$, d. h. mit der Gleichung

$$(7.a.)\qquad x^2 \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - y = 0$$

zu thun, so braucht man nur in der Gleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{1+4b^2}{4x^2}\, y = 0$$

$\frac{1+4b^2}{4} = -1$, d. h. $b = \pm \frac{1}{2} i\sqrt{5}$ zu setzen, um sie auf die Form (7.a.) zu bringen Man hat dann sogleich als particuläres Integral der letzteren

$$y = \sqrt{x}\, \cos\left(a \pm \tfrac{1}{2} i \sqrt{5}\, .\log x\right)$$

oder diesem äquivalent, für $a = 0$ und $a = \frac{\pi}{2}$, die zwei particulären Integrale

$$y = \sqrt{x}\, .\cos\left(\tfrac{1}{2} i \sqrt{5}\, .\log x\right)$$

und

$$y = \sqrt{x}\, .\sin\left(\tfrac{1}{2} i \sqrt{5}\, .\log x\right).$$

Nun ist aber

$$\cos\left(\tfrac{1}{2} i \sqrt{5} \log x\right) = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{2}\sqrt{5}\log x} + e^{-\frac{1}{2}\sqrt{5}\log x}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(x^{\frac{1}{2}\sqrt{5}} + x^{-\frac{1}{2}\sqrt{5}}\right)$$

und ebenso

$$\sin\left(\tfrac{1}{2} i \sqrt{5} \log x\right) = -\frac{1}{2i}\left(x^{\frac{1}{2}\sqrt{5}} - x^{-\frac{1}{2}\sqrt{5}}\right).$$

Das vollständige Integral der Gleichung (7.a.) lautet demnach, wenn A und B willkührliche Constante sind

$$(8.a.)\qquad y = A\, x^{\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})} + B\, x^{\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})}.$$

Die Gleichung

$$x^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \pm y = 0$$

lässt sich übrigens auch leicht direct integriren. Setzt man nämlich

$$y = x^m,$$

so verwandelt sich jene Gleichung in

$$m(m-1) \pm 1 = 0\,,$$

welche nach m aufgelöst für das obere Zeichen

$$m = \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\, i\sqrt{3}\,,$$

für das untere dagegen

$$m = \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{5}$$

liefert. Für den ersten Fall sind daher in der Formel

$$y = x^{\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} i \sqrt{3}} = \sqrt{x}\left(\cos\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\log x\right) \pm i \sin\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\log x\right)\right)$$

und für den zweiten Fall in der Formel

$$y = x^{\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})}$$

zwei particuläre Integrale enthalten. Man gelangt also auf diesem völlig verschiedenen Wege zu den nämlichen bereits oben gegebenen Integralen. Wir glaubten jedoch der obigen Integrationsweise, weil sie mit der im allgemeinen Falle durchgeführten in organischem Zusammenhange steht, hier den Vorzug geben zu müssen.

Durch die gegenwärtigen Entwickelungen ist, wie ich glaube, die Integration der so viel behandelten Riccati'schen Differentialgleichung ein für allemal und zwar auf die befriedigendste Weise erledigt. Nur möge noch gestattet sein, den Gebrauch unserer Formeln an einigen einfachen Beispielen zu erläutern.

Handelt es sich z. B. um die Integration der Gleichung

$$(9.)\qquad \sqrt{x}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \pm y = 0\,,$$

so haben wir $k = -\frac{1}{2}$, und das vollständige Integral lautet zunächst

$$y = \sqrt{x}\left(A\, J^{\frac{2}{3}}_{(\xi)} + B\, J^{-\frac{2}{3}}_{(\xi)}\right).$$

Nach Gleichung (V. §. 4.) ist aber, wenn man daselbst $m = 1$ und $\nu = -\frac{2}{3}$ setzt:

$$J^{-\frac{2}{3}}_{(\xi)} = -J^{\frac{4}{3}}_{(\xi)} + \frac{2}{3}\cdot\frac{J^{\frac{1}{3}}_{(\xi)}}{\xi}\,.$$

Wir haben demnach als vollständiges Integral der obigen Gleichung den Ausdruck

$$(10.)\qquad y = \sqrt{x}\left(A\, J^{\frac{2}{3}}_{(\xi)} + B\left[J^{\frac{4}{3}}_{(\xi)} - \frac{2}{3}\cdot\frac{J^{\frac{1}{3}}_{(\xi)}}{\xi}\right]\right),$$

worin $\xi = \frac{4}{3}\,x^{\frac{3}{4}}$ oder $\xi = i\cdot\frac{4}{3}\,x^{\frac{3}{4}}$ zu setzen ist, je nachdem

in der gegebenen Differentialgleichung das obere oder das untere Zeichen gilt.

Sei ferner $k = 1$, also die Gleichung

$$(11.) \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \pm x y = 0$$

zu integriren. Man erhält sofort die Lösung

$$y = \sqrt{x}\left(A J^{\frac{1}{3}}_{(\xi)} - B J^{-\frac{1}{3}}_{(\xi)}\right),$$

während aus (V.)

$$J^{-\frac{1}{3}}_{(\xi)} = -J^{\frac{5}{3}} + \frac{4}{3} \cdot \frac{J^{\frac{2}{3}}}{\xi}$$

resultirt. Die verlangte vollständige Lösung ist also

$$(12.) \qquad y = \sqrt{x}\left(A J^{\frac{1}{3}}_{(\xi)} + B\left[J^{\frac{5}{3}}_{(\xi)} - \frac{4}{3} \cdot \frac{J^{\frac{2}{3}}}{\xi}\right]\right),$$

wobei entweder $\xi = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$ oder $\xi = i\,\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$ zu nehmen ist, je nachdem in (11.) das obere oder das untere Zeichen eintritt.

Nehmen wir $k = -\frac{8}{5}$, so finden wir als vollständiges Integral der Gleichung

$$(13.) \qquad x^{\frac{8}{5}} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + y = 0$$

zunächst

$$y = \sqrt{x}\left(A J^{\frac{5}{2}}_{(\xi)} + B J^{-\frac{5}{2}}_{(\xi)}\right).$$

Wir erhalten sodann aus (V.) für $m = 3$ und $\nu = -\frac{5}{2}$

$$J^{-\frac{5}{2}}_{(\xi)} = -J^{\frac{7}{2}}_{(\xi)} + \frac{3}{\xi} J^{\frac{5}{2}}_{(\xi)} + \frac{3}{\xi^2} J^{\frac{3}{2}}_{(\xi)} + \frac{3}{\xi^3} J^{\frac{1}{2}}_{(\xi)},$$

während nach den Formeln des §. 16.

$$J^{\frac{1}{2}}_{(\xi)} = \sqrt{\frac{2}{\pi\xi}} \cdot \sin\xi$$

$$J^{\frac{3}{2}}_{(\xi)} = \sqrt{\frac{2}{\pi\xi}}\left(\frac{\sin\xi}{\xi} - \cos\xi\right)$$

$$J^{\frac{5}{2}}_{(\xi)} = \sqrt{\frac{2}{\pi\xi}}\left(\left[\frac{3}{\xi^2} - 1\right]\sin\xi - \frac{3}{\xi}\cos\xi\right)$$

$$J^{\frac{7}{2}}_{(\xi)} = \sqrt{\frac{2}{\pi\xi}}\left(\left[\frac{15}{\xi^3} - \frac{6}{\xi}\right]\sin\xi - \left[\frac{15}{\xi^2} - 1\right]\cos\xi\right)$$

ist. Setzt man diese Werthe oben ein, so ergibt sich nach einigen einfachen Reductionen

$$J^{-\frac{5}{2}}_{(\xi)} = \sqrt{\frac{2}{\pi\xi}}\left(\left[\frac{3}{\xi^2} - 1\right]\cos\xi + \frac{3}{\xi}\sin\xi\right)$$

und man hat, wenn man noch $\xi = 5\,x^{\frac{1}{5}}$ wirklich einsetzt, das folgende vollständige Integral der Gleichung (13.):

$$(14.)\quad y = x^{\frac{2}{5}}\left\{A\left(\left[\frac{3}{25x^{\frac{2}{5}}} - 1\right]\sin 5\,x^{\frac{1}{5}} - \frac{3}{5x^{\frac{1}{5}}}\cos 5\,x^{\frac{1}{5}}\right)\right.$$
$$\left. + B\left(\left[\frac{3}{25x^{\frac{2}{5}}} - 1\right]\cos 5\,x^{\frac{1}{5}} + \frac{3}{5x^{\frac{1}{5}}}\sin 5\,x^{\frac{1}{5}}\right)\right\}.$$

Das Integral der Gleichung

$$(15.)\quad x^{\frac{8}{5}}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - y = 0$$

findet man ganz in derselben Weise, wenn man nur zuletzt $\xi = 5ix^{\frac{1}{5}}$ setzt. Durch wenige naheliegende Umformungen nimmt es die Gestalt

$$(16.)\quad y = x^{\frac{2}{5}}\left\{A\left(\frac{3}{25x^{\frac{2}{5}}} - \frac{3}{5\,x^{\frac{1}{5}}} + 1\right)e^{5x^{\frac{1}{5}}}\right.$$
$$\left. + B\left(\frac{3}{25x^{\frac{2}{5}}} + \frac{3}{5\,x^{\frac{1}{5}}} + 1\right)e^{-5x^{\frac{1}{5}}}\right\}$$

an.

Ist $\frac{1}{k+2}$ positiv ganz $= n$, folglich $k = -\frac{2n-1}{n}$, so genügt der Gleichung

$$(17.)\quad x^{\frac{2n-1}{n}}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \pm y = 0$$

das vollständige Integral

$$(18.)\quad y = \sqrt{x}\,(A\,J^n_{(\xi)} + B\,Y^n_{(\xi)}).$$

Darin muss, wenn das obere Zeichen gilt, $\xi = 2nx^{\frac{1}{2n}}$, für das untere dagegen $\xi = 2nix^{\frac{1}{2n}}$ gesetzt werden.

Ist endlich $\frac{1}{k+2}$ negativ ganz $= -n$, d. i $k = -\frac{2n+1}{n}$, so entspricht der Gleichung

$$(19.)\quad x^{\frac{2n+1}{n}}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \pm y = 0$$

die vollständige Auflösung

$$(20.)\quad y = \sqrt{x}\,(A\,J^n_{(\xi)} + B\,Y^n_{(\xi)}),$$

welche sich von der vorhergehenden nur dadurch unterscheidet, dass in ihr entweder $\xi = 2nx^{-\frac{1}{2n}}$ oder $\xi = 2nix^{-\frac{1}{2n}}$ zu setzen ist, je nachdem in Gleichung (19.) das obere oder das untere Zeichen gilt.

§. 32. Die Gleichungen $\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + e^{2z}\, y = 0$ und $z^4 \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + e^{\frac{2}{z}}\, y = 0$.

Es leuchtet unmittelbar ein, wie aus den Gleichungen 8. §. 27. und (3. und 7. §. 28.) noch weitere lineare Differentialgleichungen von allgemeinerer Form nebst ihren Integralen hergeleitet werden könnten, von denen z. B. die Riccati'sche Gleichung nur ein specieller Fall wäre. Wir wollen uns jedoch darauf beschränken, nur noch zwei lineare Gleichungen von einfachem Bau hier anzuführen, welche aus den Formeln (8. und 9. §. 28.) hervorgehen.

Setzt man nämlich in der dortigen Formel (8.)

$$y = J^0(a^z),$$

so ist dieser Werth ein particuläres Integral der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + (\log a)^2 \,.\, a^{2z}\, y = 0\,.$$

Derselben Gleichung genügt aber auch

$$y = Y^0(a^z)\,,$$

weil ja die Gleichung (8.) (ebenso wie (9.)) auch für die Bessel'sche Function zweiter Art richtig bleibt. Setzen wir daher der Einfachheit wegen $a = e$, unter e die Basis der natürlichen Logarithmen verstanden, so entspricht der Gleichung

$$(1.)\qquad \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + e^{2z}\, y = 0$$

das vollständige Integral

$$(2.)\qquad y = A\,J^0(e^z) + B\,Y^0(e^z)\,.$$

Verfahren wir in analoger Weise mit der Formel (9. §. 28.), so erhalten wir für die Differentialgleichung

$$(3.)\qquad z^4 \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + e^{\frac{2}{z}}\, y = 0$$

die vollständige Auflösung

$$(4.)\qquad y = z\left(A\,J^0\left(e^{\frac{1}{z}}\right) + B\,Y^0\left(e^{\frac{1}{z}}\right)\right).$$

§. 33. Die Gleichung $x^m \cdot \frac{\partial^{2m} y}{\partial x^{2m}} \mp y = 0$.

Wir haben in §. 4. die Gleichung

$$(1.)\qquad \frac{\partial^{2m}\left(z^{\frac{m}{2}} J^m_{(\sqrt{z})}\right)}{\partial z^m} = (-1)^m \cdot \frac{z^{-\frac{m}{2}}}{2^{2m}} J^m_{(\sqrt{z})}$$

gefunden, welche auch in folgender Form geschrieben werden kann:

$$(-4z)^m \cdot \frac{\partial^{2m}\left(z^{\frac{m}{2}} \overset{m}{J}(\sqrt{z})\right)}{\partial z^{2m}} - z^{\frac{m}{2}} \overset{m}{J}(\sqrt{z}) = 0 \,.$$

Setzen wir darin

$$z^{\frac{m}{2}} \overset{m}{J}(\sqrt{z}) = y \,,$$

so lautet sie auch:

$$(-4z)^m \cdot \frac{\partial^{2m} y}{\partial z^{2m}} - y = 0$$

und wandelt sich durch die Substitution $-4z = px$ zunächst in folgende um:

(2.) $$\left(\frac{16}{p}\right)^m x^m \cdot \frac{\partial^{2m} y}{\partial x^{2m}} - y = 0 \,.$$

Machen wir nun

$$\left(\frac{16}{p}\right)^m = 1 \,,$$

d. h.

$$p = 16 \,.\, \sqrt[m]{1} \,,$$

so erkennen wir, dass

$$y = z^{\frac{m}{2}} \overset{m}{J}(\sqrt{z})$$

ein particuläres Integral der Differentialgleichung

(3.) $$x^m \cdot \frac{\partial^{2m} y}{\partial x^{2m}} - y = 0$$

ist, sofern nur $z = -\frac{1}{4}px$ genommen und p aus der Gleichung

$$p = 16 \sqrt[m]{1}$$

bestimmt wird. Diese Gleichung liefert aber für p m verschiedene Werthe. Bezeichnen wir irgend einen der m Werthe der $\sqrt[m]{1}$ mit α, so liefert demnach die Formel

$$y = x^{\frac{m}{2}} J^m\left(2i\sqrt{\alpha x}\right)$$

m verschiedene particuläre Integrale der Differentialgleichung (3.), falls statt α nach und nach die m verschiedenen Werthe von $\sqrt[m]{1}$ eingesetzt werden.

Die Gleichung (1.) gilt aber nicht bloss für die Bessel'sche Function erster Art, sondern ebensogut für die Bessel'sche Function zweiter Art; demnach muss auch

$$y = x^{\frac{m}{2}} Y^m\left(2i\sqrt{\alpha x}\right)$$

ein Ausdruck sein, der unter denselben Bedingungen wie oben m particuläre Integrale der Gleichung (3.) liefert.

Das vollständige Integral der Differentialgleichung

$$(3.)\qquad x^m \frac{\partial^{2m} y}{\partial x^{2m}} - y = 0$$

ist daher

$$(4.)\quad y = x^{\frac{m}{2}} \sum_{p=0}^{p=m-1} \left(A_p J^m (2i\sqrt{\alpha_p x}) + B_p Y^m (2i\sqrt{\alpha_p x}) \right),$$

wenn unter $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}$ die m Wurzelwerthe der Gleichung $\alpha^m = 1$, und unter $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{m-1}, B_0, B_1, B_2, \ldots, B_{m-1}$ $2m$ willkührliche Constante verstanden werden.

Machen wir jetzt in Gleichung (2.)

$$\left(\frac{16}{p}\right)^m = -1$$

oder

$$p = 16 \sqrt[m]{-1},$$

so geht dieselbe über in

$$(5.)\qquad x^m \frac{\partial^{2m} y}{\partial x^{2m}} + y = 0,$$

welcher aus denselben Gründen wie oben die particulären Integrale

$$y = x^{\frac{m}{2}} J^m (2i\sqrt{\beta x})$$

und

$$y = x^{\frac{m}{2}} Y^m (2i\sqrt{\beta x})$$

genügen, sofern man unter β irgend einen der m verschiedenen Werthe der $\sqrt[m]{-1}$ versteht.

Demnach genügt der Differentialgleichung

$$(5.)\qquad x^m \frac{\partial^{2m} y}{\partial x^{2m}} + y = 0$$

als vollständige Lösung der Ausdruck

$$(6.)\quad y = x^{\frac{m}{2}} \sum_{p=0}^{p=m-1} \left(A_p J^m (2i\sqrt{\beta_p x}) + B_p Y^m (2i\sqrt{\beta_p x}) \right),$$

falls $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{m-1}$ die m Wurzelwerthe der Gleichung $\beta^m = -1$ und $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{m-1}, B_0, B_1, B_2, \ldots, B_{m-1}$ $2m$ willkührliche Constante vorstellen.

Anhang.

Tafeln für die Function $J^m_{(z)}$.

Bessel hat seiner bereits citirten Abhandlung „über die planetarischen Störungen“ eine Tafel der Functionen $J^0_{(z)}$ und $J^1_{(z)}$ beigefügt, welche für alle um 0,01 verschiedenen Werthe des Arguments die zugehörigen Functionswerthe zehnstellig angibt, und zwar von $z = 0$ bis $z = 3{,}20$. Hansen hat neue Tafeln von grösserem Umfange berechnet; dieselben gehen von $z = 0$ bis $z = 20$*), mit einem Incremente $= 0{,}1$ und geben die Functionswerthe bis auf 6 Decimalstellen, von denen die letzte bis auf eine Einheit verbürgt wird. Es dürfte dem Leser erwünscht sein, diese Tafeln, welche auch der schon mehrfach angeführten Abhandlung von Schlömilch beigegeben sind, hier abgedruckt zu finden.

Die Tafel I., welche die Werthe der Functionen J^0 und J^1 enthält, ward in folgender Weise berechnet. Für die erste Hälfte der Tafel wurden die nach steigenden, für die zweite Hälfte die nach fallenden Potenzen fortschreitenden Reihen (§. 6. und §. 17.)

---

*) Hier muss bemerkt werden, dass Hansen für die Bessel'sche Function eine von der hier adoptirten abweichende Schreibweise gebraucht. Bezeichnen wir die Hansen'sche Form mit dem Buchstaben I, so besteht zwischen ihr und der unsrigen die Relation

$$I^\nu_{(z)} = J^\nu_{(2z)} \quad \text{und umgekehrt} \quad J^\nu_{(z)} = I^\nu_{(\frac{1}{2}z)}\,.$$

In den Hansen'schen Tafeln geht daher das Argument eigentlich von 0 bis 10, und das Increment beträgt 0,05. Die folgenden Tafeln ergaben sich daher aus den Hansen'schen durch blosse Verdoppelung des Arguments.

Auch Schlömilch bedient sich in seiner Abhandlung der Hansen'schen Bezeichnung. Uns schien es angemessener, die ursprünglich Bessel'sche Form beizubehalten.

benutzt. Jedoch wurden auf diesem Wege (mit Ausnahme des letzten Theiles der Tafel) nur diejenigen Functionswerthe gefunden, für welche z eine gerade Zahl ist. Aus diesen ergaben sich mit Hilfe des Taylor'schen Lehrsatzes die zwischenliegenden. Erhält nämlich das Argument z den Zuwachs h, so ist

$$J^{m}_{(z+h)} = J^{m}_{(z)} + \frac{\partial J^{m}_{(z)}}{\partial z} \cdot \frac{h}{1} + \frac{\partial^2 J^{m}_{(z)}}{\partial z^2} \cdot \frac{h^2}{2!} + \frac{\partial^3 J^{m}_{(z)}}{\partial z^3} \cdot \frac{h^3}{3!} + \cdots$$

Vermöge der Formel (6. §. 3.) ist aber

$$\frac{\partial J^{m}_{(z)}}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(J^{m-1}_{(z)} - J^{m+1}_{(z)}\right)$$

$$\frac{\partial^2 J^{m}_{(z)}}{\partial z^2} = \frac{1}{4}\left(J^{m-2}_{(z)} - 2\,J^{m}_{(z)} + J^{m+2}_{(z)}\right)$$

$$\frac{\partial^3 J^{m}_{(z)}}{\partial z^3} = \frac{1}{8}\left(J^{m-3}_{(z)} - 3\,J^{m-1}_{(z)} + 3\,J^{m+1}_{(z)} - J^{m+3}_{(z)}\right)$$

. . . .

Man erkennt aus diesen Gleichungen, dass diese Differentialquotienten dem nämlichen Bildungsgesetz gehorchen, wie die nach m genommenen endlichen Differenzen zwischen je der zweiten Function, mit dem einzigen Unterschied, dass jede dieser Differenzen noch mit der sovielten Potenz von 2 dividirt erscheint, als die jedesmalige Ordnung des Differentialquotienten angibt. Mit Rücksicht auf die Gleichung

$$J^{-m}_{(z)} = (-1)^m J^{m}_{(z)}$$

erhält man nun z. B. für $z = 8$ folgende kleine Tabelle, in welcher die successiven Differenzen mit Δ_1, Δ_2, Δ_3, ... bezeichnet sind:

m	$J^{m}_{(8)}$	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	Δ_5	Δ_6
—6	+0,3375760						
		—0,4429335					
—4	—0,1053575		+0,4352993				
		—0,0076342		—0,1430226			
—2	—0,1129917		+0,2922767		—0,718539		
		+0,2846425		—0,8615617		+2,441662	
0	+0,1716508		—0,5692850		+1,723123		—4,883324
		—0,2846425		+0,8615617		—2,441662	
2	—0,1129917		+0,2922767		—0,718539		
		+0,0076342		+0,1430226			
4	—0,1053575		+0,4352993				
		+0,4429335					
6	+0,3375760						

Bedenkt man nun, dass für die ungeraden Differenzenordnungen die Vorzeichen umgekehrt werden müssen, so erhält man sogleich:

$$\left(\frac{\partial J^1_{(z)}}{\partial z}\right)_8 = +\ 0{,}1423213 \qquad \left(\frac{\partial^2 J^0_{(z)}}{\partial z^2}\right)_8 = -\ 0{,}1423213$$

$$\left(\frac{\partial^3 J^1_{(z)}}{\partial z^3}\right)_8 = -\ 0{,}1076952 \qquad \left(\frac{\partial^4 J^0_{(z)}}{\partial z^4}\right)_8 = +\ 0{,}1076952$$

$$\left(\frac{\partial^5 J^1_{(z)}}{\partial z^5}\right)_8 = +\ 0{,}763019 \qquad \left(\frac{\partial^6 J^0_{(z)}}{\partial z^6}\right)_8 = -\ 0{,}763019$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

Ebenso ergibt sich

m	$J^m_{(z)}$	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	Δ_5
— 5	— 0,1857748					
		+ 0,4769071				
— 4	+ 0,2911323		— 1,0026757			
		— 0,5257686		+ 1,997717		
— 1	— 0,2346363		+ 0,9950412		— 3,987799	
		+ 0,4692726		— 1,990082		+ 7,975598
1	+ 0,2346363		— 0,9950412		+ 3,987799	
		— 0,5257686		+ 1,997717		
3	— 0,2911323		+ 1,0026757			
		+ 0,4769071				
5	+ 0,1857748					

Daraus folgt nun

$$\left(\frac{\partial J^0_{(z)}}{\partial z}\right)_8 = -\ 0{,}2346363 \qquad \left(\frac{\partial^2 J^1_{(z)}}{\partial z^2}\right)_8 = -\ 0{,}2487603$$

$$\left(\frac{\partial^3 J^0_{(z)}}{\partial z^3}\right)_8 = +\ 0{,}2487603 \qquad \left(\frac{\partial^4 J^1_{(z)}}{\partial z^4}\right)_8 = +\ 0{,}249237$$

$$\left(\frac{\partial^5 J^0_{(z)}}{\partial z^5}\right)_8 = -\ 0{,}249237 \qquad \vdots$$

$$\vdots$$

Hat man nun auf diesem Wege eine Tafel der Functionen J^0 und J^1 construirt, so kann man vermittelst der Gleichungen (II.), nämlich

$$J^2_{(z)} = \frac{2}{z} J^1_{(z)} - J^0_{(z)}$$

$$J^3_{(z)} = \frac{4}{z} J^2_{(z)} - J^1_{(z)}$$

$$J^4_{(z)} = \frac{6}{z} J^3_{(z)} - J^2_{(z)}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$J^m_{(z)} = \frac{2(m-1)}{z} J^{m-1}_{(z)} - J^{m-2}_{(z)},$$

alle folgenden Transcendenten der Reihe nach daraus bestimmen, oder man kann sich auch, um $J^m_{(z)}$ direct zu finden, der Gleichung (2. §. 1.) bedienen. In dem einen oder andern Falle nimmt aber die Genauigkeit ab, sobald $2(m-1)$ grösser als z geworden ist,

und der Fehler, mit welchem die letzte Decimalstelle behaftet ist, vergrössert sich so, dass zuletzt alle merklichen Ziffern unrichtig werden. Um diesem Uebelstande zu begegnen, ist die Tafel II. hinzugefügt worden, welche die Bessel'schen Functionen für grössere Indices enthält.

Beide Tafeln enthalten noch in drei Columnen unter den Ueberschriften a, b, c die Werthe der Ausdrücke

$$\frac{\partial J^m_{(z)}}{\partial z}\,, \quad \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 J^m_{(z)}}{\partial z^2}\,, \quad \frac{1}{6}\cdot\frac{\partial^3 J^m_{(z)}}{\partial z^3}\,,$$

reducirt auf das Increment der Tafel, welches in Tafel I. 0,1, in Tafel II. dagegen 0,2 ist. Hat man nun den Werth von J^m für ein nicht in der Tafel vorkommendes Argument ζ zu bestimmen, und ist z das nächste vorhandene Argument, so setze man $\zeta - z = \varepsilon$, also $\zeta = z + \varepsilon$; dann ist nach dem Taylor'schen Satze, wenn das Increment der Tafel mit h bezeichnet wird

$$J^m_{(z+\varepsilon)} = J^m_{(z)} + a\cdot\frac{\varepsilon}{h} + b\left(\frac{\varepsilon}{h}\right)^2 + c\left(\frac{\varepsilon}{h}\right)^3$$

oder

$$J^m_{(z+\varepsilon)} = J^m_{(z)} + \left[a + \left(b + c\,\frac{\varepsilon}{h}\right)\frac{\varepsilon}{h}\right]\frac{\varepsilon}{h}\,,$$

was für die Rechnung etwas kürzer ist.

Tafel I.

z	J^0	a	b	c	J^1	a	b	c
0.0	1	0	−2500	0	0	+50000	0	−62
0.1	0.997502	− 4994	2491	+ 6	0.049938	49813	− 187	62
0.2	0.990025	9950	2463	12	0.099501	49252	373	61
0.3	0.977626	14832	2416	18	0.148319	48323	556	60
0.4	0.960398	19603	2352	24	0.196027	47033	733	58
0.5	0.938470	24227	2270	30	0.242268	45393	905	56
0.6	0.912005	28670	2171	36	0.286701	43417	1070	53
0.7	0.881201	32900	2056	41	0.328996	41121	1225	50
0.8	0.846287	36884	1926	46	0.368842	38523	1370	47
0.9	0.807524	40595	1782	50	0.405950	35647	1504	43
1.0	0.765198	44005	1626	54	0.440051	32515	1626	38
1.1	0.719622	47090	1458	58	0.470902	29153	1734	34
1.2	0.671133	49829	1279	61	0.498289	25589	1828	29
1.3	0.620086	52202	1093	63	0.522023	21853	1906	24
1.4	0.566855	54195	899	65	0.541948	17975	1969	18
1.5	0.511828	55794	699	67	0.557937	13987	2016	13
1.6	0.455402	56990	496	68	0.569896	9922	2046	7
1.7	0.397985	57776	291	69	0.577765	5812	2060	− 2
1.8	0.339989	58152	− 85	68	0.581517	+ 1692	2057	+ 4
1.9	0.281819	58116	+ 120	68	0.581157	− 2405	2038	9
2.0	0.223891	57672	322	67	0.576725	6447	2002	14
2.1	0.166607	56829	520	65	0.568292	10401	1950	19
2.2	0.110362	55596	712	63	0.555963	14235	1882	25
2.3	0.055540	53987	896	60	0.539873	17919	1800	30
2.4	+0.002508	52018	1071	57	0.520185	21424	1703	34
2.5	−0.048384	49709	1236	53	0.497094	24722	1593	38
2.6	0.096805	47082	1389	49	0.470818	27789	1471	42
2.7	0.142449	44160	1530	45	0.441601	30601	1339	46
2.8	0.185036	40971	1657	40	0.409709	33136	1196	49
2.9	0.224312	37543	1769	35	0.375427	35377	1044	52
3.0	0.260052	33906	1866	29	0.339059	37307	885	54
3.1	0.292064	30092	1946	24	0.300921	38914	720	56
3.2	0.320188	26134	2009	18	0.261343	40186	551	57
3.3	0.344296	22066	2056	13	0.220663	41116	379	58
3.4	0.364296	17923	2085	7	0.179226	41701	205	58
3.5	0.380128	13738	2097	+ 1	0.137378	41938	− 32	58
3.6	0.391769	9547	2091	− 5	0.095466	41829	+ 141	57
3.7	0.399230	5383	2069	10	0.053834	41378	310	56
3.8	0.402556	− 1282	2030	16	+0.012821	40593	474	54
3.9	0.401826	+ 2724	1974	21	−0.027244	39484	634	52

Tafel I.

z	J^0	a	b	c	J^1	a	b	c
4.0	—0.397150	+ 6604	+1903	—26	—0.066043	—38064	+ 786	+49
4.1	0.388670	10327	1817	31	0.103273	36348	929	46
4.2	0.376557	13865	1718	35	0.138647	34354	1063	43
4.3	0.361011	17190	1605	39	0.171897	32103	1186	38
4.4	0.342257	20277	1481	43	0.202776	29617	1298	34
4.5	0.320543	23106	1346	47	0.231061	26920	1397	31
4.6	0.296138	25655	1202	49	0.256553	24037	1483	26
4.7	0.269331	27908	1050	52	0.279081	20995	1556	22
4.8	0.240425	29850	891	54	0.298500	17824	1613	17
4.9	0.209738	31469	728	55	0.314695	14552	1656	12
5.0	0.177597	32758	560	56	0.327579	11208	1685	7
5.1	0.144335	33710	391	56	0.337097	7824	1697	+ 2
5.2	0.110290	34322	221	56	0.343223	4429	1695	— 3
5.3	0.075803	34596	+ 53	56	0.345961	— 1053	1678	8
5.4	0.041210	34534	— 114	55	0.345345	+ 2274	1646	13
5 5	—0.006844	34144	276	53	0.341438	5524	1601	18
5.6	+0.026971	33433	433	51	0.334333	8667	1541	22
5.7	0.059920	32415	584	49	0.324148	11679	1468	26
5.8	0.091703	31103	727	46	0.311028	14533	1384	30
5.9	0.122033	29514	860	43	0.295143	17206	1288	34
6.0	0.150645	27668	984	39	0.276684	19676	1181	37
6.1	0.177291	25586	1096	35	0.255865	21924	1065	40
6.2	0.201747	23292	1197	31	0.232917	23931	941	42
6.3	0.223812	20809	1284	27	0.208087	25684	810	44
6.4	0.243311	18164	1358	22	0.181638	27169	674	46
6.5	0.260095	15384	1419	18	0.153841	28376	533	47
6.6	0.274043	12498	1465	13	0.124980	29298	388	48
6.7	0.285065	9534	1497	8	0.095342	29929	243	49
6.8	0.293096	6522	1513	— 3	0.065219	30269	+ 96	49
6.9	0.298102	3490	1516	+ 2	0.034902	30316	— 49	48
7.0	0.300079	+ 468	1504	6	—0 004683	30075	192	47
7.1	0.299051	— 2515	1478	11	+0.025153	29551	331	46
7.2	0.295071	5433	1438	15	0.054327	28753	466	44
7.3	0.288217	8257	1384	20	0.082571	27691	595	42
7.4	0.278596	10962	1319	24	0.109625	26378	716	39
7.5	0.266340	13525	1242	28	0.135248	24830	830	36
7.6	0.251602	15921	1153	31	0.159214	23065	934	33
7.7	0.234559	18131	1055	34	0.181313	21101	1028	30
7.8	0.215408	20136	948	37	0.201357	18959	1112	26
7.9	0.194362	21918	833	39	0.219179	16662	1184	22

Tafel I.

z	J^0	a	b	c	J^1	a	b	c
8.0	+0.171651	−23464	− 712	+41	+0.234636	+14232	−1244	−18
8.1	0.147518	24761	585	43	0.247607	11695	1291	14
8.2	0.122216	25800	454	44	0.257998	9075	1326	9
8.3	0.096006	26574	320	45	0.265739	6399	1348	5
8.4	0.069158	27079	185	45	0.270786	3692	1357	− 1
8.5	0.041939	27312	− 49	45	0.273121	+ 981	1352	+ 4
8.6	+0.014623	27275	+ 86	44	0.272754	− 1709	1335	8
8.7	−0.012523	26972	218	43	0.269719	4352	1306	12
8.8	0.039234	26407	346	42	0.264073	6924	1264	16
8.9	0.065253	25590	470	40	0.255902	9401	1211	20
9.0	0.090334	24531	588	38	0.245312	11759	1146	23
9.1	0.114239	23243	699	36	0.232430	13978	1071	26
9.2	0.136748	21741	802	33	0.217408	16038	987	30
9.3	0.157655	20041	896	30	0.200414	17921	894	32
9.4	0.176772	18163	980	26	0.181632	19609	794	34
9.5	0.193929	16127	1055	23	0.161264	21090	686	36
9.6	0.208979	13952	1118	19	0.139525	22351	574	38
9.7	0.221796	11664	1169	15	0.116639	23382	456	39
9.8	0.232276	9284	1209	11	0.092840	24175	336	40
9.9	0.240341	6837	1236	7	0.068370	24725	213	41
10.0	0.245936	4347	1251	+ 3	0.043473	25028	− 90	41
10.1	0.249030	− 1840	1254	− 1	+0.018396	25085	+ 33	41
10.2	0.249617	+ 661	1245	5	−0.006616	24897	155	40
10.3	0.247717	3132	1223	9	0.031318	24468	274	39
10.4	0.243372	5547	1191	13	0.055473	23804	389	37
10.5	0.236648	7885	1146	17	0.078850	22914	500	36
10.6	0.227635	10123	1090	20	0.101229	21808	605	34
10.7	0.216443	12240	1025	23	0.122399	20500	702	31
10.8	0.203202	14210	950	26	0.142166	19004	793	29
10.9	0.188062	16035	867	29	0.160350	17335	875	26
11.0	0.171190	17679	776	32	0.176785	15512	947	23
11.1	0.152768	19133	678	34	0.191328	13553	1010	19
11.2	0.132992	20385	574	35	0.203853	11479	1062	16
11.3	0.112069	21426	466	37	0.214255	9311	1104	12
11.4	0.090215	22245	353	38	0.222450	7070	1135	8
11.5	0.067654	22838	239	38	0.228379	4780	1154	4
11.6	0.044616	23200	123	39	0.232000	2462	1162	+ 1
11.7	−0.021332	23330	+ 7	39	0.233300	− 139	1159	− 3
11.8	+0.001967	23228	− 108	38	0.232285	+ 2165	1144	7
11.9	0.025049	22898	221	37	0.228983	4429	1118	10

Tafel I.

z	J^0	a	b	c	J^1	a	b	c
12.0	+0.047689	+22345	− 332	−36	−0.223447	+ 6631	+1082	−14
12.1	0.069667	21575	437	34	0.215749	8750	1035	17
12.2	0.090770	20598	538	32	0.205982	10765	979	20
12.3	0.110798	19426	633	30	0.194259	12659	913	23
12.4	0.129561	18071	721	28	0.180710	14413	839	26
12.5	0.146884	16548	801	25	0.165484	16012	758	28
12.6	0.162607	14874	872	22	0.148742	17441	670	30
12.7	0.176588	13066	934	19	0.130662	18688	576	32
12.8	0.188701	11143	987	16	0.111432	19741	477	34
12.9	0.198843	9125	1030	12	0.091248	20592	374	35
13.0	0.206926	7032	1062	9	0.070318	21234	268	36
13.1	0.212888	4885	1083	5	0.048853	21662	160	36
13.2	0.216686	2707	1094	− 2	0.027067	21874	+ 52	36
13.3	0.218298	+ 518	1094	+ 2	−0.005177	21869	− 57	36
13.4	0.217725	− 1660	1083	5	+0.016599	21649	163	35
13.5	0.214989	3805	1061	9	0.038049	21217	268	34
13.6	0.210133	5896	1029	12	0.058965	20580	369	33
13.7	0.203221	7914	987	15	0.079143	19744	466	31
13.8	0.194336	9839	936	18	0.098391	18721	557	29
13.9	0.183580	11653	876	21	0.116525	17520	643	27
14.0	0.171073	13338	808	24	0.133375	16155	721	25
14.1	0.156953	14878	732	26	0.148784	14640	792	22
14.2	0.141369	16261	650	28	0.162611	12992	855	19
14.3	0.124488	17473	561	30	0.174729	11227	909	16
14.4	0.106484	18503	468	32	0.185032	9363	953	13
14.5	0.087545	19343	371	33	0.193429	7421	988	10
14.6	0.067864	19985	271	34	0.199853	5418	1013	6
14.7	0.047642	20425	169	34	0.204251	3375	1028	− 3
14.8	0.027082	20659	− 66	34	0.206596	+ 1312	1033	0
14.9	+0.006392	20688	+ 37	34	0.206876	− 749	1027	+ 3
15.0	−0.014224	20510	139	34	0.205104	2790	1012	7
15.1	0.034462	20131	239	33	0.201310	4789	986	10
15.2	0.054421	19555	336	32	0.195545	6729	951	13
15.3	0.073608	18788	429	30	0.187879	8589	907	16
15.4	0.091936	17840	518	28	0.178400	10352	855	19
15.5	0.109231	6721	600	26	0.167213	12002	794	21
15.6	0.125326	15444	676	24	0.154440	13523	726	24
15.7	0.140070	14022	745	22	0.140216	14900	651	26
15.8	0.153326	12469	806	19	0.124691	16122	570	28
15.9	0.164971	10803	859	16	0.108028	17177	484	29

Tafel I.

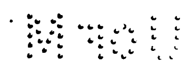
z	J^0	a	b	c	J^1	a	b	c
16.0	—0.174899	— 9040	+ 903	+13	+0.090397	—18055	— 394	+31
16.1	0.183024	7198	937	10	0.071979	18749	300	32
16.2	0.189275	5296	963	7	0.052962	19254	204	32
16.3	0.193603	3354	978	+ 4	0.033535	19566	107	32
16.4	0.195975	— 1389	984	0	+0.013895	19682	+ 9	33
16.5	0.196381	+ 577	980	— 3	—0.005764	19603	+ 88	32
16.6	0.194828	2525	966	6	0.025247	19331	184	32
16.7	0.191344	4436	943	9	0.044362	18869	278	31
16.8	0.185974	6292	911	12	0.062923	18223	368	29
16.9	0.178783	8075	870	15	0.080749	17401	454	28
17.0	0.169854	9767	821	18	0.097669	16411	535	26
17.1	0.159285	11352	763	20	0.113519	15265	610	24
17.2	0.147191	12815	699	23	0.128150	13974	679	22
17.3	0.133701	14142	628	25	0.141423	12553	741	19
17.4	0.118956	15322	551	26	0.153216	11015	795	17
17.5	0.103110	16342	469	28	0.163420	9377	841	14
17.6	0.086328	17194	383	29	0.171943	7656	879	11
17.7	0.068780	17871	293	30	0.178710	5868	907	8
17.8	0.050646	18366	202	31	0.183663	4033	927	5
17.9	0.032109	18677	108	31	0.186765	2168	937	+ 2
18.0	—0.013356	18799	+ 15	31	0.187995	— 291	938	— 1
18.1	+0.005427	18735	— 79	31	0.187350	+ 1578	930	4
18.2	0.024052	18485	171	30	0.184848	3421	912	7
18.3	0.042336	18052	261	29	0.180523	5220	886	10
18.4	0.060098	17443	348	28	0.174428	6958	851	13
18.5	0.077165	16663	431	27	0.166634	8617	808	16
18.6	0.093371	15722	509	25	0.157225	10182	757	18
18.7	0.108560	14630	582	23	0.146305	11638	698	20
18.8	0.122585	13399	649	21	0.133990	12971	634	22
18.9	0.135315	12041	708	19	0.120408	14169	563	24
19.0	0.146630	10570	761	16	0.105702	15219	487	26
19.1	0.156423	9002	806	14	0.090022	16114	407	27
19.2	0.164607	7353	842	11	0.073529	16844	323	28
19.3	0.171107	5639	870	8	0.056391	17403	236	29
19.4	0.175869	3878	889	5	0.038782	17787	148	29
19.5	0.178854	2088	900	— 2	0.020877	17992	+ 58	30
19.6	0.180041	+ 286	901	+ 1	—0.002857	18019	— 32	30
19.7	0.179427	— 1510	893	4	+0.015101	17866	121	29
19.8	0.177029	3282	877	7	0.032817	17537	208	29
19.9	0.172878	5012	852	10	0.050117	17036	293	28
20.0	+0.167025	— 6683	818	+12	+0.066833	+16368	— 374	—26

Tafel II.

z	J^5	a	b	c	z	J^6	a	b	c
0.0	0.0000000	0	0	0	0.0	0.0000000	0	0	0
0.2	0.0000001	+ 1	+ 8	+ 12	0.2	0.0000000	0	0	+ 1
0.4	0.0000026	65	66	36	0.4	0.0000001	+ 2	+ 3	3
0.6	0.0000199	330	218	74	0.6	0.0000010	19	17	8
0.8	0.0000831	1027	504	123	0.8	0.0000056	82	50	18
1.0	0.0002498	2456	953	180	1.0	0.0000209	247	122	33
1.2	0.0006101	4961	1584	241	1.2	0.0000615	604	245	53
1.4	0.0012901	8910	2397	299	1.4	0.0001523	1275	438	79
1.6	0.0024523	14663	3384	352	1.6	0.0003321	2414	717	110
1.8	0.0042937	22540	4514	394	1.8	0.0006569	4207	1095	144
2.0	0.0070396	32793	5752	423	2.0	0.0012024	6865	1581	182

z	J^8	a	b	c	z	J^9	a	b	c
2.0	0.0000222	+ 174	+ 58	+ 8	2.0	0.0000025	+ 22	+ 9	+ 1
2.2	0.0000464	327	99	16	2.2	0.0000058	46	15	3
2.4	0.0000908	580	159	25	2.4	0.0000123	89	28	5
2.6	0.0001674	980	246	34	2.6	0.0000246	164	48	8
2.8	0.0002937	1584	364	46	2.8	0.0000467	287	77	12
3.0	0.0004934	2463	522	60	3.0	0.0000844	481	119	17
3.2	0.0007983	3699	721	75	3.2	0.0001462	774	177	23
3.4	0.0012483	5386	974	93	3.4	0.0002438	1205	258	31
3.6	0.0018940	7631	1280	111	3.6	0.0003934	1821	362	40
3.8	0.0027967	10544	1642	130	3.8	0.0006160	2675	497	51
4.0	0.0040287	14237	2061	149	4.0	0.0009386	3834	667	62

z	J^{11}	a	b	c	z	J^{12}	a	b	c
4.0	0.0000366	+ 189	+ 43	+ 3	4.0	0.0000062	+ 36	+ 9	+ 2
4.2	0.0000604	296	64	7	4.2	0.0000109	59	14	2
4.4	0.0000972	449	91	11	4.4	0.0000184	94	22	3
4.6	0.0001524	668	129	15	4.6	0.0000303	147	33	4
4.8	0.0002337	974	178	19	4.8	0.0000486	224	47	6
5.0	0.0003509	1392	242	24	5.0	0.0000763	335	65	8
5.2	0.0005168	1952	321	30	5.2	0.0001172	492	92	10
5.4	0.0007473	2691	421	37	5.4	0.0001767	709	126	13
5.6	0.0010623	3650	542	45	5.6	0.0002616	1003	170	17
5.8	0.0014861	4876	688	53	5.8	0.0003807	1397	226	21
6.0	0.0020480	6419	860	61	6.0	0.0005452	1915	295	25

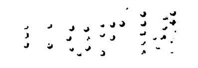


Tafel II.

z	J^{13}	a	b	c	z	J^{14}	a	b	c
6.0	0.0001327	+ 515	+ 89	+ 7	6.0	0.0000297	+ 127	+ 24	+ 3
6.2	0.0001941	725	121	11	6.2	0.0000451	185	34	4
6.4	0.0002798	1002	159	15	6.4	0.0000674	265	47	5
6.6	0.0003974	1367	208	19	6.6	0.0000991	375	64	6
6.8	0.0005569	1842	268	23	6.8	0.0001436	522	85	8
7.0	0.0007702	2450	343	27	7.0	0.0002052	720	114	10
7.2	0.0010523	3221	431	32	7.2	0.0002896	979	148	13
7.4	0.0014209	4185	536	38	7.4	0.0004035	1314	191	16
7.6	0.0018970	5379	661	45	7.6	0.0005557	1747	243	19
7.8	0.0025055	6839	803	51	7.8	0.0007567	2295	307	23
8.0	0.0032749	8604	967	58	8.0	0.0010193	2982	383	28

z	J^{15}	a	b	c	z	J^{16}	a	b	c
8.0	0.0002926	+ 941	+ 135	+11	8.0	0.0000780	+ 273	+ 43	+ 4
8.2	0.0003015	1248	173	14	8.2	0.0001101	373	57	5
8.4	0.0005451	1639	219	17	8.4	0.0001537	504	75	7
8.6	0.0007327	2131	275	20	8.6	0.0002123	675	97	8
8.8	0.0009754	2744	340	24	8.8	0.0002904	895	123	10
9.0	0.0012864	3501	418	28	9.0	0.0003933	1174	157	12
9.2	0.0016813	4427	510	33	9.2	0.0005277	1527	197	15
9.4	0.0021784	5550	615	37	9.4	0.0007017	1968	245	18
9.6	0.0027987	6896	734	43	9.6	0.0009248	2514	303	21
9.8	0.0035661	8497	871	49	9.8	0.0012087	3185	370	24
10.0	0.0045080	10930	1023	56	10.0	0.0015668	4002	449	27

z	J^{18}	a	b	c	z	J^{19}	a	b	c
10.0	0.0001524	+ 463	+ 64	+ 5	10.0	0.0000431	+ 141	+ 21	+ 2
10.2	0.0002056	606	81	6	10.2	0.0000596	189	27	3
10.4	0.0002750	789	103	8	10.4	0.0000815	252	36	3
10.6	0.0003650	1019	128	9	10.6	0.0001106	333	46	4
10.8	0.0004806	1304	159	11	10.8	0.0001489	437	58	5
11.0	0.0006281	1658	195	13	11.0	0.0001990	569	73	6
11.2	0.0008148	2091	239	16	11.2	0.0002638	734	93	7
11.4	0.0010494	2619	291	19	11.4	0.0003472	942	116	8
11.6	0.0013423	3259	350	21	11.6	0.0004538	1199	142	10
11.8	0.0017054	4026	418	24	11.8	0.0005889	1514	175	12
12.0	0.0021522	4939	497	27	12.0	0.0007590	1901	213	14



Tafel II.

z	J^{20}	a	b	c	z	J^{21}	a	b	c
12.0	0.0002512	+ 681	+ 84	+ 7	12.0	0.0000784	+ 228	+ 30	+ 2
12.2	0.0003283	876	103	8	12.2	0.0001045	297	39	3
12.4	0.0004261	1098	128	9	12.4	0.0001384	384	48	4
12.6	0.0005496	1381	156	10	12.6	0.0001820	492	61	5
12.8	0.0007044	1725	189	12	12.8	0.0002378	628	75	6
13.0	0.0008971	2143	230	14	13.0	0.0003087	796	94	6
13.2	0.0011358	2645	274	16	13.2	0.0003984	1004	115	8
13.4	0.0014294	3245	327	19	13.4	0.0005111	1257	139	9
13.6	0.0017885	3957	386	22	13.6	0.0006517	1564	169	11
13.8	0.0022250	4796	455	25	13.8	0.0008261	1935	204	13
14.0	0.0027527	5782	532	28	14.0	0.0010413	2381	243	15

z	J^{23}	a	b	c	z	J^{24}	a	b	c
14.0	0.0001252	+ 331	+ 40	+ 3	14.0	0.0000402	+ 113	+ 15	+ 1
14.2	0.0001626	420	50	4	14.2	0.0000531	146	18	2
14.4	0.0002100	532	62	4	14.4	0.0000697	188	23	2
14.6	0.0002698	669	75	5	14.6	0.0000910	240	29	2
14.8	0.0003447	834	91	6	14.8	0.0001182	306	36	3
15.0	0.0004379	1037	112	7	15.0	0.0001527	387	45	3
15.2	0.0005536	1283	134	8	15.2	0.0001963	488	55	4
15.4	0.0006962	1577	161	10	15.4	0.0002510	610	67	5
15.6	0.0008710	1929	192	11	15.6	0.0003192	760	82	5
15.8	0.0010843	2349	228	13	15.8	0.0004040	942	99	6
16.0	0.0013433	2845	269	15	16.0	0.0005087	1160	120	6

z	J^{25}	a	b	c	z	J^{26}	a	b	c
16.0	0.0001828	+ 446	+ 50	+ 3	16.0	0.0000625	+ 162	+ 20	+ 1
16.2	0.0002328	557	61	4	16.2	0.0000808	206	24	2
16.4	0.0002950	691	73	5	16.4	0.0001040	260	30	2
16.6	0.0003719	853	90	6	16.6	0.0001332	326	37	3
16.8	0.0004668	1050	107	6	16.8	0.0001698	408	45	3
17.0	0.0005832	1284	128	7	17.0	0.0002154	507	55	4
17.2	0.0007252	1564	152	9	17.2	0.0002720	628	66	4
17.4	0.0008977	1896	181	10	17.4	0.0003419	774	80	5
17.6	0.0011064	2288	211	11	17.6	0.0004278	949	95	6
17.8	0.0013575	2747	249	13	17.8	0.0005328	1158	115	7
18.0	0.0016585	3286	290	15	18.0	0.0006608	1408	136	8

Tafel II.

z	J^{27}	a	b	c	z	J^{28}	a	b	c
18.0	0.0002505	+ 570	+ 59	+ 4	18.0	0.0000906	+ 219	+ 24	+ 1
18.2	0.0003138	701	72	4	18.2	0.0001151	274	30	1
18.4	0.0003915	858	86	5	18.4	0.0001457	340	36	2
18.6	0.0004864	1045	102	6	18.6	0.0001835	420	44	3
18.8	0.0006017	1268	121	7	18.8	0.0002302	518	54	3
19.0	0.0007413	1531	143	8	19.0	0.0002877	635	64	4
19.2	0.0009095	1842	169	9	19.2	0.0003580	775	76	5
19.4	0.0011115	2207	197	10	19.4	0.0004436	942	91	5
19.6	0.0013529	2632	229	11	19.6	0.0005475	1141	108	6
19.8	0.0016402	3127	267	13	19.8	0.0006731	1377	128	7
20.0	0.0019809	3700	307	15	20.0	0.0008243	1654	150	8

Druckfehler.

Seite 43 heisst die Seitenzahl fälschlich 34.
Seite 44, Zeile 6 v. u. statt $J^{\nu+2p+2}$ **l.** $J^{\nu+2p+4}$.
Seite 45, Zeile 8 v. u. statt zd^6 **l.** dz^6.



